Numerické riešenie nelineárnych rovníc

V tejto kapitole sa budeme zaoberať určovaním reálnych koreňov rovnice

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

kde f je reálna funkcia reálnej premennej.
Číslo α, pre ktoré $f(\alpha) = 0$, nazývame koreňom rovnice $f(x) = 0$. Ak je funkcia f polynómom, nazývame rovnicu $f(x) = 0$ algebrickou rovnicou.
Na riešenie nelineárnych rovníc sú vypracované špeciálne metódy. Avšak u väčšiny rovníc dokážeme vypočítať iba približnú hodnotu koreňa α. Ak hľadáme koreň so zadanou presnosťou ε, znamená to, že chceme nájsť také x_n, že $|x_n - \alpha| < \varepsilon$.
Pri riešení rovnice (1) je vhodný nasledujúci postup:

1. Určíme počet koreňov rovnice pomocou grafického znázornenia.
2. Pre každý koreň α_i určíme interval (a_i, b_i) taký, že $\alpha_i \in (a_i, b_i)$ (separujeme korene), pričom $\alpha_i \in (a_i, b_i)$ je jediný koreň v intervale (a_i, b_i).
3. Použijeme približné metódy na výpočet koreňov.
4.
    - Ak je daná presnosť ε, proces ukončíme, keď je daná presnosť dosiahnutá.
    - Ak je daný počet iterácií, urobíme odhad absolútnej chyby vypočítaného koreňa.

Veta (Bolzanova)

Nech $A \subseteq \mathbb{R}$ a funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle \subset A$, pričom platí $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje aspoň jedno číslo $c \in (a, b)$ také, že $f(c) = 0$.

Dôsledok

Nech pre x_n platí

$$f(x_n - \varepsilon) \cdot f(x_n + \varepsilon) < 0.$$

Potom sa v intervale $(x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$ nachádza koreň α, teda x_n je riešenie úlohy s presnosťou ε. Tento test obyčajne nazývame $\pm\varepsilon$-test.

Poznámka. Rovnica $f(x) = 0$ môže mať v intervale (a, b) nulový bod aj v prípade, keď $f(a) \cdot f(b) > 0$. V tomto prípade je počet koreňov v intervale (a, b) párny.

Príklad

Rovnica $x^2 - 4 = 0$ má v intervale $(-3; 3)$ korene -2, 2, hoci $f(-3) \cdot f(3) > 0$.

Odhad chyby

Veta

Nech α je presná hodnota a x_n približná hodnota koreňa rovnice (1). Nech obe tieto hodnoty ležia v intervale (a, b) a $|f'(x)| \geq m > 0$ pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$. Potom platí odhad

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}. \tag{2}$$

Metóda polovičného delenia intervalu (bisekcie)

Predpokladajme, že rovnica $f(x) = 0$ má práve jeden koreň α v intervale (a, b). Definujme postupnosť intervalov $\langle a_n, b_n \rangle$, $n = 1, 2, \ldots$ predpisom:

1. $\langle a_0, b_0 \rangle = \langle a, b \rangle$.
2. Nech je definovaný interval $\langle a_n, b_n \rangle$, pričom $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$. Nech
$$c_n = (a_n + b_n)/2. \tag{3}$$
3. Ak je $f(c_n) = 0$, potom je c_n koreňom rovnice. Ak je $f(c_n) \neq 0$ a $f(a_n) \cdot f(c_n) < 0$, položíme $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$. Ak platí opačná nerovnosť, t. j. $f(a_n) \cdot f(c_n) > 0$, položíme $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$. Ak má postupnosť (c_n) konečný počet členov, jej posledný člen je koreňom rovnice $f(x) = 0$. Ak je postupnosť (c_n) nekonečná, potom má limitu a platí
$$\lim_{n \to \infty} c_n = \alpha.$$

   Pre odhad absolútnej chyby koreňa α platí $|c_n - \alpha| < \frac{b-a}{2^{n+1}}$.

Ak máme vypočítať koreň α s presnosťou $\varepsilon > 0$, ukončíme proces delenia intervalu, ak $|b_n - a_n| < 2\varepsilon$ a za aproximáciu koreňa α vezmeme číslo $(a_n + b_n)/2$.

Príklad

Metódou polovičného delenia intervalu s presnosťou 0,005 vypočítajte reálny koreň rovnice $x^3 - x - 1 = 0$.

Máme $f(x) = x^3 - x - 1$. Naprv uskutočníme grafický odhad koreňov. Nech $h(x) = x + 1$, $g(x) = x^3$. Grafy týchto funkcií majú jeden spoločný bod, ktorého x-ová súradnica je z intervalu $(1; 2)$. Skutočne $f(1) \cdot f(2) < 0$, čo znamená, že v tomto intervale leží reálny koreň danej rovnice.
Teda $a_0 = 1$, $b_0 = 2$.

n	a_n $(f(a_n))$	b_n $(f(b_n))$	c_n $(f(c_n))$	$f(a_n) \cdot f(c_n)$
0	1 (–)	2 (+)	1,5 (+)	$-$
1	1 (–)	1,5 (+)	1,25 (–)	$+$
2	1,25 (–)	1,5 (+)	1,375 (+)	$-$
3	1,25 (–)	1,375 (+)	1,3125 (–)	$+$
4	1,3125 (–)	1,375 (+)	1,34375 (+)	$-$
5	1,3125 (–)	1,34375 (+)	1,32813 (+)	$-$
6	1,3125 (–)	1,32813 (+)	1,32032 (–)	$+$
7	1,32032 (–)	1,32813 (+)	1,32423	

Pretože $|1{,}32813 - 1{,}32032| < 2 \cdot 0{,}005$ a $f(1{,}32813) \cdot f(1{,}32032) < 0$, môžeme aproximovať koreň pomocou $c_6 = 1,32423$. Teda $\alpha \approx 1,32423$.

Newtonova metóda

Predpokladajme, že $\langle a, b \rangle$ je interval separácie, teda platí $f(a) \cdot f(b) < 0$ a v intervale $\langle a, b \rangle$ leží práve jeden koreň rovnice $f(x) = 0$.
Newtonovu metódu, nazývanú tiež metóda dotyčníc, môžeme použiť na riešenie rovnice $f(x) = 0$, ak je funkcia dvakrát diferencovateľná a buď konvexná na celom intervale $\langle a, b \rangle$ alebo konkávna na celom intervale $\langle a, b \rangle$.
Rovnica dotyčnice ku grafu funkcie $f(x)$ v bode x_n: $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$.
Ďalšiu aproximáciu x_{n+1} určíme ako priesečník dotyčnice s osou x (t. j. pri dosadení x_{n+1} za x položíme súčasne $y = 0$). Dostávame

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n).$$

a z toho rekurentný vzorec

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Veta

Nech na intervale $\langle a, b\rangle$ sú splnené nasledujúce podmienky:

1. $f(a) \cdot f(b) < 0.$
2. $f''(x)$ nemení znamienko na intervale $\langle a, b\rangle$.
3. Pre štartovací bod $x_0 \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Potom postupnosť daná vzťahom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

konverguje ku koreňu α rovnice $f(x) = 0$, teda platí $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

Ak navyše platí podmienka

4. $f^{'}(x)$ nemení znamienko na intervale $\langle a, b\rangle$,
   môžeme na odhad presnosti používať vzťah $|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$, kde $m \leq \min_{x\in\langle a,b\rangle} |f'(x)|$.

STOP TEST:

1. Ak platí podmienka **4** a $\frac{|f(x_n)|}{m} < \varepsilon$, potom $\alpha \approx x_n$.
2. Ak neplatí podmienka **4** a $f(x_n - \varepsilon) \cdot f(x_n + \varepsilon) < 0$, potom $\alpha \approx x_n$.

Príklad

Newtonovou metódou vypočítajme reálny koreň rovnice $x^3 - x - 1 = 0$ *s presnosťou 0,005.*

Z predchádzajúceho už vieme, že $\alpha \in \langle 1; 2 \rangle$. Bisekciou môžeme zúžiť tento interval. Keďže $f(1) \cdot f(1,5) < 0$, dostávame $\alpha \in \langle 1; 1{,}5 \rangle$.
Keďže $f'(x) = 3\,x^2 - 1 > 0$ pre $x \in \langle 1; 1{,}5 \rangle$, na intervale separácie je $m = \min\limits_{x \in \langle 1; 1{,}5 \rangle} |f'(x)| = 2$. Pre druhú deriváciu platí $f''(x) = 6\,x > 0$ na uvažovanom intervale a $f(1{,}5) > 0$, teda Newtonova metóda bude konvergovať k riešeniu rovnice z bodu $x_0 = 1{,}5$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{\lvert f(x_n)\rvert}{m} = \frac{\lvert f(x_n)\rvert}{2}$
0	1,5	$0,875$	$5,75$	$0,4375 > \varepsilon$
1	1,34783	$0,10068$	$4,44990$	$0,05034 > \varepsilon$
2	1,32520	$0,00205$	$4,26846$	$0,001025 < \varepsilon$

Keďže

$$|x_2 - \alpha| \leq \frac{|f(x_2)|}{m} < \frac{0{,}0021}{2} = 0{,}00105,$$

už po druhom kroku sme dosiahli požadovanú presnosť. Teda $\alpha \approx 1,32520$.

Metóda prostej iterácie

Hľadáme riešenie rovnice $f(x) = 0$ v intervale $\langle a, b\rangle$. Rovnicu $f(x) = 0$ vieme vždy prepísať na tvar

$$x = \varphi(x) \tag{4}$$

tak, aby platilo

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \lambda|x - y|$$

pre $x, y \in \langle a, b\rangle$ a zároveň $\varphi(x)$, $\varphi(y) \in \langle a, b\rangle$. Ak $\lambda \in (0, 1)$, potom λ sa nazýva koeficient kontraktívnosti. Ak $\lambda > 1$, bisekciou zmenšíme interval $\langle a, b\rangle$ tak, aby na novom intervale platilo $\lambda < 1$. Potom $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je kontraktívna funkcia na $\langle a, b\rangle$.

Nech funkcia φ je na $\langle a, b\rangle$ diferencovateľná. Potom podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote existuje $\xi \in (a, b)$ také, že

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x - y), \text{resp.} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} = \varphi'(\xi)$$

Ak existuje kladné číslo M také, že $M = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |\varphi'(x)|$, tak pre $x \in \langle a, b\rangle$ platí

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq M|x - y|.$$

Ak je číslo $M < 1$, môžeme ho zobrať za koeficient kontraktívnosti, teda $\lambda = M$.

Veta

Nech $\varphi : \langle a, b\rangle \to \langle a, b\rangle$ je spojitá funkcia na $\langle a, b\rangle$. Nech existuje spojitá derivácia φ' na intervale (a, b) a číslo λ, $0 \leq \lambda < 1$ také, že $|\varphi'(x)| \leq \lambda$ pre ľubovoľné $x \in (a, b)$.
Potom iteračný proces

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad \text{pre} \quad i = 0, 1, \dots \tag{5}$$

konverguje k jedinému koreňu α rovnice $x = \varphi(x)$ a platí odhad

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}|x_n - x_{n-1}|, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{6}$$

Zo vzťahu (6) vyplýva, že iteračný proces pri zadanej presnosti ε ukončíme, keď platí $|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-\lambda}{\lambda} \cdot \varepsilon$. Potom $\alpha \approx x_n$.

Príklad

Prostou iteračnou metódou vypočítajme reálny koreň rovnice $x^3 - x - 1 = 0$ *s presnosťou 0,005.*

Rovnica $x^3 - x - 1 = 0$ má jediný reálny koreň $\alpha \in (1; 2)$. Danú rovnicu môžeme zapísať v tvare

$$x = \sqrt[3]{x+1} = \varphi(x), \text{teda } \varphi(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

Dostávame

$$|\varphi'(x)| = |\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}, \qquad \max_{x \in \langle 1,2 \rangle} |\varphi'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \approx 0,21.$$

Na určenie približnej hodnoty koreňa α použijeme iteračný proces $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + 1}, \quad i = 0, 1, \dots .$ Za začiatočnú hodnotu zvoľme napríklad $x_0 = 1{,}5$. Iteračný proces ukončíme, keď $|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-\lambda}{\lambda} \cdot \varepsilon \approx 0,0188$.

Dostávame tieto iterácie:

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	1,5	
1	1,3572	$0,1428$
2	1,3308	$0,0264$
3	1,3259	$0,0049 < 0,0188$

Keďže $|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-\lambda}{\lambda} \cdot \varepsilon$, môžeme s presnosťou aspoň 0,005 aproximovať koreň rovnice $x^3 - x - 1 = 0$ pomocou x_3. Teda $\alpha \approx 1{,}3259$.

Riešenie sústav nelineárnych rovníc

Budeme sa zaoberať niektorými numerickými metódami riešenia sústavy n nelineárnych rovníc o n neznámych

$$\overline{f}(\overline{x}) = \overline{0}, \tag{7}$$

kde $\overline{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$ je vektorová funkcia n nezávislých premenných x_1, x_2, ..., x_n. Túto sústavu môžeme v zložkách zapísať v tvare

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Budeme predpokladať, že vektorová funkcia $\overline{f}$ je definovaná na neprázdnej množine $G \subset \mathbb{R}^n$. Riešiť sústavu (7) znamená nájsť všetky také body $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T \in G$, pre ktoré platí $\overline{f}(\overline{\alpha}) = \overline{0}$. Bod $\overline{\alpha}$ nazývame riešením uvedenej sústavy. Separáciou vektora $\overline{\alpha}$ rozumieme určenie takej ohraničenej, uzavretej oblasti $D \subset G$, do ktorej patrí jediné riešenie $\overline{\alpha}$.

Označme $\overline{f}'$ tzv. Jacobiovu maticu zobrazenia $\overline{f}$, potom

$$\overline{f}'(\overline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\overline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\overline{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\overline{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\overline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\overline{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\overline{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\overline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\overline{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\overline{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Ak pre každé $\overline{x} \in D$, je $\det(\overline{f}'(\overline{x})) \neq 0$, má daná sústava rovníc jediné riešenie. Ak $\overline{x}^{(k)}$ je k-tá iterácia vektora $\overline{\alpha}$, potom vektor $\overline{x}^{(k+1)}$ nájdeme použitím Taylorovej vety pre funkciu n premenných.

Pre názornosť uvedieme postup konštrukcie pre $n = 2$. Riešme túto sústavu rovníc

$$f_1(x, y) = 0,$$

$$f_2(x, y) = 0.$$

Použitím Taylorovej vety dostávame

$$f_i(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}) = f_i(x^{(k)}, y^{(k)}) +$$

$$+\frac{\partial f_i(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + \frac{\partial f_i(\overline{x}^{(k)})}{\partial y}(y^{(k+1)} - y^{(k)}) + R_i,$$

kde $i = 1, 2$. V každej z rovníc zanedbáme zvyšky R_1, R_2 a $f_i(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)})$.
Ďalšiu aproximáciu dostaneme riešením sústavy lineárnych rovníc

$$\frac{\partial f_1(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + \frac{\partial f_1(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial y}(y^{(k+1)} - y^{(k)}) = -f_1(x^{(k)}, y^{(k)}),$$

$$\frac{\partial f_2(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + \frac{\partial f_2(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial y}(y^{(k+1)} - y^{(k)}) = -f_2(x^{(k)}, y^{(k)}).$$

Dostávame sústavu 2 lineárnych rovníc s neznámymi $(x^{(k+1)} - x^{(k)})$ a $(y^{(k+1)} - y^{(k)})$, ktorú môžeme riešiť napr. Cramerovým pravidlom.

Označme

$$W_1^{(k)} = \begin{vmatrix} -f_1(x^{(k)}, y^{(k)}) & \dfrac{\partial f_1(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial y} \\ -f_2(x^{(k)}, y^{(k)}) & \dfrac{\partial f_2(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad W_2^{(k)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x} & -f_1(x^{(k)}, y^{(k)}) \\ \dfrac{\partial f_2(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x} & -f_2(x^{(k)}, y^{(k)}) \end{vmatrix},$$

$$W^{(k)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Potom

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = \frac{W_1^{(k)}}{W^{(k)}} \Rightarrow x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{W_1^{(k)}}{W^{(k)}},$$

$$y^{(k+1)} - y^{(k)} = \frac{W_2^{(k)}}{W^{(k)}} \Rightarrow y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{W_2^{(k)}}{W^{(k)}}.$$

Iteračný proces ukončíme, keď

$$\|\overline{x}^{(k+1)} - \overline{(k)}\| = \max\{|x^{(k+1)} - x^{(k)}|, |y^{(k+1)} - y^{(k)}|\} < \varepsilon.$$

Príklad

Urobme 3 iterácie Newtonovej metódy z bodu $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (0,0)$ *a určme chybu pre sústavu nelineárnych rovníc*

$$x^2 + 4x - y^2 - 2y - 1 = 0,$$
$$x^2 + 5y - 4 = 0.$$

Riešenie. Máme $f_1(x,y) = x^2 + 4x - y^2 - 2y - 1, \quad f_2(x,y) = x^2 + 5y - 4.$

$$W(x,y) = \begin{vmatrix} 2x+4 & -2y-2 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}, \quad W_1(x,y) = \begin{vmatrix} -x^2-4x+y^2+2y+1 & -2y-2 \\ -x^2-5y+4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$W_2(x,y) = \begin{vmatrix} 2x+4 & -x^2-4x+y^2+2y+1 \\ 2x & -x^2-5y+4 \end{vmatrix}.$$

Pre $x^{(0)} = 0,\ y^{(0)} = 0$ dostávame

$$W^{(0)} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 20, \quad W_1^{(0)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 13, \quad W_2^{(0)} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16.$$

Dostávame
$x^{(1)} = 0 + \frac{13}{20} = 0,65;$
$y^{(1)} = 0 + \frac{16}{20} = 0,8.$

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
0	0	0
1	0,65	0,8
2	0,63609	0,71911
3	0,637108	0,71881

Chyba je
$\max\{|x^{(3)} - x^{(2)}|, |y^{(3)} - y^{(2)}|\} =$
$\max\{0,001018;\ 0,0003\} =$
$0,001018.$

Aproximácia funkcií

V tejto kapitole sa budeme zaoberať aproximáciou, t. j. náhradou funkcie $f : A \to \mathbb{R}$ pomocou funkcie $g : A \subset B \to \mathbb{R}$. Funkciu g zvolíme podľa toho, čo vieme o funkcii f. Funkcia f môže byť zadaná napríklad funkčnými hodnotami v $n+1$ bodoch alebo je príliš zložitá a na riešenie danej úlohy (napríklad výpočet určitého integrálu) nevhodná. Funkciu g obyčajne hľadáme v tvare

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot g_i(x).$$

Za funkcie g_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ berieme väčšinou funkcie 1, x, x^2, x^3, ..., alebo funkcie 1, $\cos \frac{\pi x}{l}$, $\sin \frac{\pi x}{l}$, ..., $\cos \frac{n\pi x}{l}$, $\sin \frac{n\pi x}{l}$. Koeficienty c_i určujeme na základe nejakého vhodného kritéria. Podľa voľby kritéria dostávame určitý typ aproximácie. Budeme sa zaoberať týmito typmi aproximácie:

a) Interpolácia pomocou Lagrangeovho polynómu.

b) Aproximácia metódou najmenších štvorcov.

Interpolácia

Nech funkcia f je zadaná svojimi funkčnými hodnotami v $n+1$ bodoch, t. j. tabuľkou hodnôt

x	x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\ldots$	$f(x_n)$

Základnou úlohou interpolácie pomocou polynómov je určiť polynóm P najmenšieho možného stupňa tak, aby pre $i = 0, 1, \ldots, n$ platilo

$$f^{(j)}(x_i) = P^{(j)}(x_i), \quad j = 0, 1, \ldots, r_i - 1.$$

Budeme sa zaoberať aproximáciami, kde $r_i = 1$ pre $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, t. j. hľadáme polynóm P najviac n-tého stupňa s vlastnosťou

$$f(x_i) = P(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Lagrangeov interpolačný polynóm

Funkciu f zadanú v $n+1$ bodoch aproximujeme pomocou polynómu tvaru

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot g_i(x) \tag{9}$$

tak, aby platilo

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{10}$$

Body x_i nazývame uzlovými bodmi.

Funkcie g_i zvolíme tak, aby platilo $g_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{pre } i = j, \\ 0, & \text{pre } i \neq j. \end{cases}$ Keďže $g_i(x_j) = 0$ pre $j \neq i$, dostávame

$$g_i(x) = C_i(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n),$$

kde C_i je reálna konštanta, ktorú vypočítame z podmienky $g_i(x_i) = 1$, t. j.

$$C_i = \frac{1}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

Potom polynóm $L_n(x)$ má tvar

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \cdot f(x_i).$$

Príklad 1

Nahraďte funkciu pomocou Lagrangeovho polynómu a vypočítajte približnú hodnotu funkcie f v bode $x = 3$, ak sú zadané hodnoty funkcie $f : \langle 1, 4\rangle \to \mathbb{R}$ tabuľkou:

x	1	2	4
$f(x)$	2	3	11

Pre $n = 2$ máme

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \cdot f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \cdot f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \cdot f(x_2).$$

Vzhľadom na zadané hodnoty dostávame

$$L_2(x) = \frac{(x - 2)(x - 4)}{(1 - 2)(1 - 4)} \cdot 2 + \frac{(x - 1)(x - 4)}{(2 - 1)2 - 4)} \cdot 3 + \frac{(x - 1)(x - 2)}{(4 - 1)(4 - 2)} \cdot 11 = x^2 - 2x + 3.$$

Pre $x = 3$ dostávame

$$L_2(3) = \frac{(3-2)(3-4)}{(1-2)(1-4)} \cdot 2 + \frac{(3-1)(3-4)}{(2-1)(2-4)} \cdot 3 + \frac{(3-1)(3-2)}{(4-1)(4-2)} \cdot 11 = 6.$$

Metóda najmenších štvorcov

Nech namerané tabuľkové hodnoty (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$ sú vyjadrením závislosti x a y, kde x_i sú zvolené hodnoty pri ktorých sme robili merania a y_i je nameraná hodnota funkcie $f(x)$ v bode x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. O závislosti medzi x a y predpokladajme, že má tvar

$$y = \varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_k\varphi_k(x),$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ sú neznáme konštanty.
Z množiny všetkých lineárnych funkcií

$$V_k = \{a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_k\varphi_k(x),\ a_i \in \mathbb{R}\}$$

chceme nájsť tú, ktorá najpresnejšie aproximuje funkciu zadanú pomocou tabuľky jej nameraných hodnôt. Určíme také reálne koeficienty a_0, a_1, $\ldots$, a_k, pre ktoré je hodnota funkcie

$$S(a_0, a_1, \ldots, a_k) = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2$$

minimálna. Koeficienty a_0, a_1, $\ldots$, a_k určíme riešením sústavy rovníc

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, k.$$

Odvodíme sústavu rovníc pre prípad $k = 1$, teda $\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x)$.

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{n} [a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) - y_i]^2,$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n} [a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) - y_i] \cdot \varphi_0(x_i),$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=0}^{n} [a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) - y_i] \cdot \varphi_1(x_i).$$

Tieto parciálne derivácie sa rovnajú nule práve vtedy, ak platí:

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i)\varphi_0(x_i) + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i)\varphi_0(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_0(x_i),$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i)\varphi_1(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_1(x_i).$$

Odvodíme sústavu rovníc pre prípad $k = 2$:

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i)$$

$$S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=0}^{n} [a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i) - y_i]^2,$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n} [a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i) - y_i] \cdot \varphi_0(x_i),$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=0}^{n} [a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i) - y_i] \cdot \varphi_1(x_i),$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = 2\sum_{i=0}^{n} [a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i) - y_i] \cdot \varphi_2(x_i).$$

Tieto parciálne derivácie sa rovnajú nule práve vtedy, ak platí:

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i)\varphi_0(x_i) + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i)\varphi_0(x_i) + a_2 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_2(x_i)\varphi_0(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_0(x_i),$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i)\varphi_1(x_i) + a_2 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_2(x_i)\varphi_1(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_1(x_i),$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i)\varphi_2(x_i) + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i)\varphi_2(x_i) + a_2 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_2(x_i)\varphi_2(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_2(x_i).$$

Príklad 3

Polynómom prvého a druhého stupňa aproximujme funkciu, danú tabuľkou

x_i	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	1	1,1
y_i	3,45	3,54	4,1	4,35	4,6	5,05	5,14

.

Uvažujme najprv aproximáciu pomocou lineárnej funkcie

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x.$$

Máme $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = x$. Teoretická sústava rovníc má tvar

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} 1 \cdot 1 + a_1 \sum_{i=0}^{n} 1 \cdot x_i = \sum_{i=0}^{n} 1 \cdot y_i,$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot 1 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot x_i = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot y_i.$$

Po dosadení hodnôt z tabuľky dostávame

$$7a_0 + 4{,}6a_1 = 30{,}23,$$

$$4{,}6a_0 + 3{,}72a_1 = 21{,}231.$$

Riešením tejto sústavy je $a_0 = 3{,}03135$, $a_1 = 1{,}9588$, teda

$$\varphi(x) = 3{,}03135 + 1{,}9588x.$$

Podobne postupujeme pri aproximácii pomocou funkcie

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Uvažujeme

$$\varphi_0 = 1,\ \varphi_1 = x,\ \varphi_2 = x^2.$$

Dostávame sústavu rovníc

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} 1 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i,$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i,$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^4 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i.$$

Potom pre zadané tabuľkové hodnoty dostávame

$$7a_0 + 4{,}6a_1 + 3{,}72a_2 = 30{,}23,$$

$$4{,}6a_0 + 3{,}72a_1 + 3{,}42a_2 = 21{,}231,$$

$$3{,}72a_0 + 3{,}42a_1 + 3{,}186a_2 = 17{,}8265.$$

Riešením sústavy dostávame $a_0 = 3{,}4033,\ a_1 = 0{,}61756,\ a_2 = 0{,}9586.$
Potom $\varphi(x) = 3{,}4033 + 0{,}61756x + 0{,}9586x^2.$

Numerický výpočet určitého integrálu

Budeme sa zaoberať numerickými metódami výpočtu

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $a < b$ sú reálne čísla a predpokladáme, že funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na $\langle a, b\rangle$. Interval $I = \langle a, b\rangle$ rozdelíme na n intervalov rovnakej dĺžky uzlovými bodmi

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

kde $x_i = x_0 + i \cdot h,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$ a $h = \dfrac{x_n - x_0}{n} = \dfrac{b-a}{n}$ je konštantný krok. Nech pre prirodzené čísla s a n_1 platí $n = s \cdot n_1$. Budeme uvažovať len prípady $s = 1$, t. j. $n = n_1$ a $s = 2$, t. j. $n = 2\,n_1$. Z vlastností určitého integrálu dostávame

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_0+sh} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+sh}^{x_0+2sh} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_0+(n_1-1)sh}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

Uvedieme tzv. elementárne vzorce, vzťahujúce sa na interval $\langle x_0, x_0 + sh\rangle$. Vzorce sa dajú získať napríklad integrovaním interpolačných polynómov.

Lichobežníková metóda

Uvažujme prípad $s = 1$, teda interval $\langle x_0, x_0 + h\rangle = \langle x_0, x_1\rangle$. Na tomto intervale budeme aproximovať funkciu $f(x)$ Lagrangeovým polynómom prvého stupňa

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot f(x_1).$$

$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ je teda nahradený obsahom lichobežníka so základňami $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$ a výškou h, teda

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2} \cdot [f(x_i) + f(x_{i+1})].$$

Toto je elementárny vzorec tzv. lichobežníkovej metódy.
Súčtom elementárnych vzorcov dostávame:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx L(n) = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]. \qquad (12)$$

Horný odhad chyby je
$|R_L(n)| \le \frac{b-a}{12} M_2 h^2$, resp. $|R_L(n)| \le \frac{(b-a)^3 M_2}{12 n^2}$, kde $M_2 \ge \max\limits_{x \in \langle a,b\rangle} |f''(x)|$.

Simpsonova metóda

V prípade $s = 2$ (n je párne) bude interval $\langle x_0, x_0 + 2h\rangle = \langle x_0, x_2\rangle$. Ak na tomto intervale budeme aproximovať funkciu $f(x)$ Lagrangeovým polynómom druhého stupňa s uzlovými bodmi x_0, x_1 a x_2, dostaneme približnú hodnotu

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{x_0}^{x_2} L_2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\cdot[f(x_0) + 4\,f(x_1) + f(x_2)].$$

Toto je elementárny vzorec tzv. Simpsonovej metódy. Zovšeobecnenie:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{x_i}^{x_{i+2}} L_2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\cdot[f(x_i) + 4\,f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})].$$

Sčítaním vyššie uvedených základných vzorcov dostávame

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx S(n) = \frac{h}{3}\cdot\left[f(a) + f(b) + 4\cdot\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\cdot\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i})\right].$$

Označme M_4 horný odhad $|f^{(4)}(x)|$ na intervale $\langle a, b\rangle$: $M_4 \geq \max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} |f^{(4)}(x)|$.

Horný odhady chyby pre Simpsonovu metódu pre krok h, resp. pre počet delení n:

$$|R_S(n)| \leq \frac{b-a}{180} M_4 h^4, \quad \text{resp.} \quad |R_S(n)| \leq \frac{(b-a)^5 M_4}{180 n^4}. \tag{13}$$

Príklad

Vypočítajme pomocou lichobežníkovej metódy a Simpsonovej metódy, s presnosťou $\varepsilon = 0{,}01$

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Riešenie. Na určenie kroku h (počtu delení n) použijeme vzťahy (13). Pre $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ je

$$\max_{0\le x\le 1} |f''(x)| \le 6\mathrm{e} = M_2, \quad \text{resp.} \quad \max_{0\le x\le 1} |f^{(4)}(x)| \le 76\mathrm{e} = M_4.$$

Po dosadení do vzťahov pre horné odhady a po porovnaní s presnosťou ε dostávame pre lichobežníkovú metódu $n > 11{,}66$ a pre Simpsonovu metódu $n > 3{,}27$.

Teda pre lichobežníkovú metódu môžeme zvoliť $n = 12$, čiže $h = 1/12$. Dostávame

$$L(12) = \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{12}\left[\frac{\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^1}{2} + \mathrm{e}^{(1/12)^2} + \cdots + \mathrm{e}^{(11/12)^2}\right] \approx 1{,}4658.$$

Pre Simpsonovu metódu pri $n = 4$, $h = 0{,}25$ dostávame hodnotu

$$S(4) = \frac{0{,}25}{3}\left[\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^1 + 4(\mathrm{e}^{(0{,}25)^2} + \mathrm{e}^{(0{,}75)^2}) + 2\mathrm{e}^{(0{,}5)^2}\right] \approx 1{,}4637.$$

TEÓRIA PRAVDEPODOBNOSTI

Princíp násobenia

Ak činnosť pozostáva z k krokov po sebe nasledujúcich a
prvý krok môže byť uskutočnený n_1 spôsobmi,
druhý krok môže byť uskutočnený n_2 spôsobmi,
$\vdots$
k-ty krok môže byť uskutočnený n_k spôsobmi,
tak počet rôznych spôsobov vykonania činnosti je $n_1 \cdot n_2 \dots n_k$.

Princíp sčítania

Majme množiny $A_1, A_2, \dots, A_k$, ktoré sú po dvojiciach disjunktné. Nech $|A_i| = n_i$.
Potom $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Permutácie

Nech $n, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$. Definujeme n-faktoriál a a kombinačné číslo nasledovne:

$$0! = 1, \qquad (n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Špeciálne platí

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n-1} = n.$$

Permutácie sú usporiadané n-tice prvkov n-prvkovej množiny. Ak sú všetky prvky navzájom rôzne, jedná sa o permutácie bez opakovania. Ak sú niektoré prvky množiny rovnaké, jedná sa o permutácie s opakovaním.

Počet permutácií n-tej triedy bez opakovania je

$$P(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Počet permutácií n-tej triedy s opakovaním je

$$P'_{n_1, n_2, \ldots, n_c}(n) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \ldots \cdot n_c!} \qquad (n_1 + n_2 + \cdots + n_c = n)$$

Príklad

Koľkými spôsobmi môžeme vytvoriť tanečné páry z 8 chlapcov and 8 dievčat?

Predstavme si, že chlapci sú zoradení. Počet možností, ako vytvoriť páry sa rovná počtu permutácií z 8 dievčat, teda

$$P(8) = 8! = 40320.$$

Príklad

1 Koľko slov (aj neplnovýznamových) môžeme vytvoriť zámenou poradia písmen v slove MATEMATIKA?

Jedná sa o permutácie z 10 prvkov (písmen) s opakovaním. Máme $n_1 = 2$ (písmeno M sa vyskytuje dvakrát), $n_2 = 3$, $n_3 = 2$, $n_4 = n_5 = n_6 = 1$. Dostávame

$$V_{2,3,2,1,1,1} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200.$$

Variácie

Variácie sú usporiadané k-tice z n navzájom rôznych prvkov. Rozoznávame variácie bez opakovania a variácie s opakovaním.
Počet variácií k-tej triedy z n prvkov ($k \leq n$) je

$$V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

V prípade $n = k$ dostávame permutácie.

Počet variácií k-tej triedy z n prvkov s opakovaním je

$$V'(n, k) = n^k.$$

Pri variáciách s opakovaním môže byť $k > n$.

Príklad

V košíku je banán, jablko a pomaranč. Päť dievčat má chuť na ovocie. Koľkými spôsobmi môžeme dať trom dievčatám po 1 kuse ovocia a dvom nedať žiadne?

Záleží na tom, ktoré ovocie bude ktorému dievčaťu „priradené“, teda záleží na poradí. Zoberieme banán a dáme ho jednému z 5 dievčat. Môžeme ho vybrať 5 spôsobmi. Jablko dáme ho jednému zo 4 dievčat, čo môžeme urobiť 4 spôsobmi. Pomaranč dáme jednému z 3 dievčat. Máme teda $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ možností.
Pri použitím variácií vytvárame usporiadané trojice z piatich rôznych prvkov, teda $n = 5$, $k = 3$. Podľa (14) dostávame $V(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60.$

Príklad

Koľko podmnožín má 5-prvková množina?

Označme množinu ako $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Každej podmnožine môžeme priradiť usporiadanú päticu z núl a jednotiek a to tak, že na i-tej pozícii je 1, ak prvok a_i do tejto podmnožiny patrí a 0, ak prvok a_i do tejto podmnožiny nepatrí. Potom počet všetkých podmnožín sa rovná počtu usporiadaných pätíc z dvoch prvkov. Jedná sa teda o variácie s opakovaním, pričom $n = 2$, $k = 5$. Dostávame $V'(2,5) = 2^5 = 32.$

Kombinácie

Kombinácie sú podmnožiny danej veľkosti odobraté z daného vstupného súboru. Počet prvkov súboru označíme n a počet prvkov podmnožiny označíme k. Počet kombinácií z n prvkov k-tej triedy ($k \leq n$) je

$$C(n,k) = \binom{n}{k}.$$

Ak $n = k$, dostávame $C(n,n) = 1$.

Príklad

V dielni pracuje 15 mužov a 12 žien. Koľkými spôsobmi možno vybrať 7 zamestnancov dielne na rekreáciu, ak majú ísť 4 muži a 3 ženy?

Pri výbere mužov vyberáme 4 prvky z 15 prvkov, jedná sa o kombinácie bez opakovania. Počet možností je $C(15,4) = \binom{15}{4}$. Obdobne pri výbere žien máme $C(12,3) = \binom{12}{3}$ možností. Z princípu násobenia vyplýva, že počet spôsobov výberu rekreantov je $\binom{15}{4} \cdot \binom{12}{3} = 300300$.

Pokus a jav

Nech je pevne stanovený istý systém podmienok, napr. majme pravidelnú hraciu kocku, ktorej steny sú označené číslami 1, 2, ..., 6. Proces, ktorý môže nastať pri realizácii týchto podmienok, napr. hod touto hracou kockou, nazývame pokusom. Tu vyžadujeme, aby každý pokus mal tzv. vlastnosť hromadnosti, t. j. aby sme ho mohli za tých istých podmienok teoreticky ľubovoľnekrát opakovať.
Výsledok pokusu je jav. Pri hode kockou môže byť javom napr. padnutie šestky, padnutie nepárneho čísla, padnutie čísla väčšieho ako 4,...
Z pohľadu možného nastatia delíme javy do troch základných skupín:

1. javy isté sú javy, ktoré po vykonaní daného pokusu vždy nastanú (napr. padnutie čísla menšieho než 10);
2. javy nemožné sú javy, ktoré po vykonaní daného pokusu nikdy nenastanú (napr. padnutie čísla 10);
3. javy náhodné sú javy, ktoré po vykonaní daného pokusu môžu, ale nemusia nastať (napr. padnutie párneho čísla).

Javy budeme označovať veľkými písmenami $A, B, C, \dots$, istému javu vyhradíme písmeno I a nemožnému javu znak $\emptyset$.

Základné poznatky o javoch

Definícia

- Jav A nazývame podjavom javu B práve vtedy, keď z nastatia javu A vyplýva nastatie javu B. Zapisujeme $A \subset B$.
  (Napr. padnutie čísla 2 na hracej kocke je podjavom javu, že padne na nej párne číslo.)
- Javy A a B nazývame ekvivalentné práve vtedy, keď $A \subset B$ a súčasne $B \subset A$. Zapisujeme $A = B$.
- Opačným javom k javu A nazývame jav, ktorý nastane práve vtedy, keď nenastane jav A. Označujeme $\overline{A}$.
- Jav C nazývame prienikom javov A a B práve vtedy, keď nastane len za súčasného nastatia oboch javov A a B. Zapisujeme $C = A \cap B$.
- Jav C nazývame zjednotením javov A a B práve vtedy, keď nastane len za predpokladu, že nastal aspoň jeden z javov A a B. Zapisujeme $C = A \cup B$.

Vlastnosti javov a operácií s javmi

Nech A, B, C sú ľubovoľné javy. Platí:

1. $A \subset A, \quad \emptyset \subset A, \quad A \subset I$;
2. ak $A \subset B$ a $B \subset C$, tak $A \subset C$;
3. $\bar{I} = \emptyset$, $\bar{\emptyset} = I$, $\overline{(\bar{A})} = A$;
4. $\bar{A} \cap A = \emptyset$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap I = A$, $A \cap B \subset A$;
5. $\bar{A} \cup A = I$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup I = I$, $A \subset A \cup B$;
6. $A \cap A = A, \quad A \cup A = A$;
7. $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$;
8. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
9. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
10. $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (de Morganove pravidlá).

Príklad

Nech jav A spočíva v tom, že pri jednom hode bežnou hracou kockou padne na vrchnej stene párne číslo a nech jav B znamená padnutie čísla, ktoré je väčšie ako 3. Charakterizujme javy:
$A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{B}$, $\overline{A \cap B}$.

Riešenie. Je zrejmé, že jav A nastane, keď padne niektoré číslo z množiny $\{2, 4, 6\}$ a jav B nastane, keď padne niektoré číslo z množiny $\{4, 5, 6\}$.

- jav $A \cup B$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{2, 4, 5, 6\}$;
- jav $A \cap B$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{4, 6\}$;
- jav $\overline{B}$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{1, 2, 3\}$;
- jav $\overline{A \cap B}$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{1, 2, 3, 5\}$.

Definícia

Javy A a B nazývame disjunktnými (nezlúčiteľnými) práve vtedy, keď nemôžu súčasne nastať, t. j. keď $A \cap B = \emptyset$. Javy H_1, H_2, ..., H_n nazývame disjunktnými (nezlúčiteľnými) javmi práve vtedy, keď sú po dvojiciach disjunktné t. j. keď $H_i \cap H_j = \emptyset$ pre každé $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definícia

Systém H_1, H_2, ..., H_n je úplný disjunktný systém javov, ak platí

- $H_i \cap H_j = \emptyset$ pre každé $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$;
- $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n = \bigcup_{i=1}^{n} H_i = I$.

Takýto systém javov často nazývame hypotézy.

Príklad

Pre pokus „hod kockou" je príkladom hypotéz množina javov

$$H_1 = \{1, 6, 5\}, \ H_2 = \{3, 4\}, H_3 = \{2\}.$$

Množina javov $H_1 = \{1, 6, 5\}$, $H_2 = \{2, 3, 4\}$, $H_3 = \{2\}$ *netvorí hypotézy, lebo* $H_2 \cap H_3 = \{2\} \neq \emptyset$.
Množina javov $H_1 = \{1, 6\}$, $H_2 = \{3, 4\}$, $H_3 = \{2\}$ *netvorí hypotézy, lebo* $H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \{1, 2, 3, 4, 6\} \neq I$.

Elementárne a zložené javy

Definícia

Jav A nazývame zloženým javom práve vtedy, keď sa dá vyjadriť ako zjednotenie dvoch javov A_1 a A_2, ktoré sa nerovnajú nemožnému javu ani javu A.

Pre zložený jav A teda platí: $A = A_1 \cup A_2$, pričom $A \neq A_1 \neq \emptyset$ a $A \neq A_2 \neq \emptyset$.
Hovoríme, že jav A je rozložený na javy A_1 a A_2.
Príkladom zloženého javu je napr. padnutie nepárneho čísla na kocke.

Definícia

Každý jav E, ktorý nie je zložený nazývame elementárnym javom.

Základné vlastnosti elementárnych javov:

1. Jav E je elementárny práve vtedy, keď neexistuje taký jav $A \neq \emptyset$, že $A \subset E$.
2. Ku každému zloženému javu A existuje taký elementárny jav E, že $E \subset A$.
3. Ľubovoľné dva rôzne elementárne javy sú disjunktné.
4. Každému zloženému javu A môžeme jednoznačne priradiť takú množinu elementárnych javov (táto množina nemusí byť konečná), že jav A je zjednotením týchto elementárnych javov.

Javové pole

Definícia

Nech $\gamma = \{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\}$ *je ľubovoľná množina elementárnych javov. Pod javovým poľom nad* γ *rozumieme taký systém* τ *podmnožín množiny* γ*, pre ktorý platí:*

1. $\emptyset \in \tau$;
2. *ak* A*,* $B \in \tau$*, tak* $A \cap B \in \tau$*,* $A \cup B \in \tau$ *a* $\overline{A} \in \tau$;
3. *pre každú postupnosť* A_1*,* A_2*, ...,* A_n*,* $\ldots \in \tau$ *je* $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \tau$ *a* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \tau$.

Prvky javového poľa nazývame javmi.

Pojem pravdepodobnosti javu

Definícia (Klasická definícia pravdepodobnosti)

Nech $\gamma = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ je konečná množina elementárnych javov a nech každý elementárny jav je **„rovnako možný (očakávaný)"**. Pre ľubovoľný jav $A \in \tau$ definujeme jeho pravdepodobnosť predpisom

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

kde m je počet rôznych elementárnych javov, na ktoré sa jav A rozkladá, t. j.

$$A = E_{i_1} \cup E_{i_2} \cup \cdots \cup E_{i_m}.$$

Rovnosť (14) môžeme interpretovať aj takto:

$$P(A) = \frac{\text{počet všetkých možných priaznivých výsledkov javu } A}{\text{počet všetkých možných výsledkov pokusu}}.$$

Základné vlastnosti pravdepodobnosti

Veta

1. *Pre každý jav* $A \in \tau$ *je* $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. *Pre istý a nemožný jav je* $P(I) = 1$ *a* $P(\emptyset) = 0$.
3. *ak* $A \subset B$, *tak* $P(A) \leq P(B)$.
4. *Pre opačný jav platí* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
5. *Pre disjunktné javy: ak* $A \cap B = \emptyset$, *tak* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
6. *pre ľubovoľné javy* A, B *je* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
7. *pre ľubovoľné javy* A, B, C *je*

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$
$$-[P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)] + P(A \cap B \cap C);$$

Príklad

Aká je pravdepodobnosť toho, že pri 3 hodoch mincou padne dvakrát hlava a raz znak.

Riešenie. Množina elementárnych javov pozostáva z 8 javov:

$$\gamma = \{ZZZ, ZZH, ZHZ, ZHH, HZZ, HZH, HHZ, HHH\}$$

Jav „padnutie dvoch hláv a jedného znaku“ pozostáva z nasledujúcich elementárnych javov: $A = \{HHZ, HZH, ZHH\}$.
Teda $m = 3$, $n = 8$. Pravdepodobnosť javu A je $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{8}$.

Príklad

V študijnej skupine je 17 chlapcov a 13 dievčat. Na skúške 4 chlapci a 5 dievčat získalo ohodnotenie „A“. Aká je pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný študent je dievča alebo študent, ktorý získal na skúške „A“?

Riešenie. Nech A je udalosť, že vybraný študent získal ohodnotenie „A“ and B je udalosť, že vybraný študent je dievča. Chceme vypočítať $P(A \cup B)$. Dostávame

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{30} + \frac{13}{30} - \frac{5}{30} = \frac{17}{30}.$$

Príklad

Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že pri hode 2 kockami padne súčet
a) rovný 1,
b) rovný 4,
c) menší ako 13.

Riešenie. Množina elementárnych javov pozostáva z usporiadaných dvojíc z prvkov $1, 2, \ldots, 6$, teda $n = 36$.

a) Nech A je jav „súčet je 1". Súčet hodnôt na 2 kockách nemôže byť rovný 1, jav A je jav nemožný. Teda $P(A) = 0$.

b) Nech B je jav „súčet je 4". Máme $B = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$, teda $m = 3$, $n = 36$. Potom $P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

c) Nech C je jav „súčet je menší ako 13". Jav C pozostáva zo všetkých elementárnych javov, je to istý jav. Teda $P(C) = 1$.

Axiomatická definícia pravdepodobnosti

Definícia (Axiomatická definícia pravdepodobnosti)

Nech γ je množina elementárnych javov a nech τ je javové pole nad γ (t. j. τ je množina javov). Nech sú splnené tieto tri axiómy:

A_1: každému javu $A \in \tau$ je priradené práve jedno nezáporné číslo $P(A)$, ktoré nazývame **pravdepodobnosťou javu A**;

A_2: $P(I) = 1$;

A_3: pre ľubovoľný systém disjunktných javov $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau$ platí

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \tag{14}$$

Usporiadanú trojicu $[\gamma, \tau, P]$ nazývame **pravdepodobnostné pole**.

Podmienená pravdepodobnosť a veta o úplnej pravdepodobnosti

Za istých okolností je užitočné skúmať pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že vieme o tom, že nastal jav B. Túto pravdepodobnosť budeme označovať $P(A|B)$ a čítať **pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že nastal jav B**.

Definícia (Podmienená pravdepodobnosť)

Nech $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole. **Pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že nastal jav B** *definujeme takto:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Veta

Ak $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole, tak pre javy $A_i \in \tau$, $i = 1, 2, \dots, n$ platí

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Príklad

Zo štatistického prieskumu vyplýva, že z 100000 živo narodených mužov sa dožije desiatich rokov 96600 mužov a šesťdesiatich rokov 77500 mužov. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že ak sa muž dožije desiatich rokov, tak sa dožije 60 rokov.

Riešenie. Nech B je jav, ktorý spočíva v tom, že muž sa dožije desiatich rokov a nech A je jav, že muž dožije šesťdesiatich rokov. Chceme určiť pravdepodobnosť toho, že nastal jav A za predpokladu, že nastal jav B, t. j. $P(A|B)$. V našom prípade platí, že $A \subset B$ a teda $A \cap B = A$.

Zo zadania máme $P(A) = \frac{77500}{10000} = 0,775$, $P(B) = \frac{96600}{10000} = 0,966$. Dostávame

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0,775}{0,966} = 0,8023.$$

Príklad

Predpokladajme, že bolo zmiešaných päť dobrých poistiek a dve chybné poistky. Aby sme našli chybné poistky, testujeme ich jed po druhom, náhodne a bez výmeny. Aká je pravdepodobnosť, že budeme mať šťastie a nájdeme obe chybné poistky v prvých dvoch testoch?

Riešenie. Nechajte A je udalosť, že nájdeme chybnú poistku v prvom teste a B a B je udalosť, že nájdeme chybnú poistku v druhom teste. Vieme, že $P(A) = \frac{2}{7}$ a $P(B|A) = 1/6$. Chceme vypočítať $P(A \cap B)$. Dostávame

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{21} = 0,047619.$$

Veta (Veta o úplnej pravdepodobnosti)

Nech H_1, H_2, ..., H_n sú hypotézy (t. j. úplný systém disjunktných javov). Potom pre ľubovoľný jav A platí

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + \cdots + P(A|H_n) \cdot P(H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i).$$

Dôkaz. Pre jav A máme:

$$A = A \cap I = A \cap (H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n) = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \cdots \cup (A \cap H_n).$$

Keďže javy H_i sú disjunktné a $(A \cap H_i) \subset H_i$, tak aj javy $(A \cap H_1)$, $(A \cap H_2)$, ..., $(A \cap H_n)$ sú disjunktné a podľa tretej axiómy definície pravdepodobnosti je

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \cdots + P(A \cap H_n) =$$

$$= P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \cdots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)$$

Príklad

Dva automaty vyrábajú rovnaké výrobky, pričom produktivita prvého je trikrát vyššia ako produktivita druhého. Prvý automat vyrába 70% kvalitných výrobkov, druhý 80% kvalitných výrobkov. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybratý výrobok je kvalitný.

Riešenie. Označme javy nasledovne:
H_1 – výrobok je vyrobený prvým automatom;
H_2 – výrobok je vyrobený druhým automatom;
A – výrobok je kvalitný.
Počet výrobkov vyrobených automatmi je v pomere 3:1, teda 1. automat vyrobí $\frac{3}{4}$ z celkového počtu výrobkov a 2. automat $\frac{1}{4}$ z celkového počtu výrobkov. Odtiaľ $P(H_1) = \frac{3}{4} = 0,75$, $P(H_2) = \frac{1}{4} = 0,25$. Výrobok je kvalitný, ak ho vyrobil 1. automat, s pravdepodobnosťou 0,7. Teda $P(A|H_1) = 0,7$. Podobne $P(A|H_2) = 0,8$. Podľa vety o úplnej pravdepodovnosti dostávame

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) = 0,75 \cdot 0,7 + 0,25 \cdot 0,8 = 0,725.$$

Príklad

Z balíčka 52 žolíkových kariet niekto zobral dve karty. Aká je pravdepodobnosť, že náhodná karta vytiahnutá z balíčka s 50 kartami je piková karta?

Riešenie. Nech H_i je jav, že chýba i pikových kariet, $i = 0, 1, 2$. Nech A je jav, že náhodne vylosovaná karta je piková karta. Chceme vypočítať $P(A)$. Máme

$$P(H_0) = \frac{\binom{13}{0} \cdot \binom{39}{2}}{\binom{52}{2}}, \quad P(H_1) = \frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{39}{1}}{\binom{52}{2}}, \quad P(H_2) = \frac{\binom{13}{2} \cdot \binom{39}{0}}{\binom{52}{2}}.$$

Podmienené pravdepodobnosti sú

$$P(A|H_0) = \frac{13}{50}, \qquad P(A|H_1) = \frac{12}{50}, \qquad P(A|H_2) = \frac{11}{50}.$$

Podľa vety o úplnej pravdepodobnosti dostávame

$$P(A) = P(A|H_0) \cdot P(H_0) + P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) =$$

$$= \frac{13}{50} \cdot \frac{\binom{13}{0} \cdot \binom{39}{2}}{\binom{52}{2}} + \frac{12}{50} \cdot \frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{39}{1}}{\binom{52}{2}} + \frac{11}{50} \cdot \frac{\binom{13}{2} \cdot \binom{39}{0}}{\binom{52}{2}} = \frac{1}{4}.$$

Bayesov vzorec

Veta

Nech javy $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sú hypotézy a $A \in \tau$ je ľubovoľný jav, pre ktorý je $P(A) \neq 0$. Potom pre každú hypotézu H_k je

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)}.$$

Okrem toho platí $\sum_{i=1}^{n} P(H_i|A) = 1$.

Príklad

Urna 1 obsahuje 5 bielych guľôčok a 7 čierne guľôčky. Urna 2 obsahuje 3 biele a 12 čiernych guľôčok. Hodíme mincou a ak padne hlava, vyberieme guľôčku z urny 1, a ak je to znak, vyberieme guľôčku z urny 2. Dozvedeli sme sa, že bola vybraná biela guľôčka. Aká je pravdepodobnosť, že to bola guľôčka vybratá z urny 2?

Riešenie. Nech H_1 je jav, že padla hlava a H_2 je jav, že padol znak. Nech A je jav, že bola vybraná biela guľôčka. Zo zadania vyplýva, že $P(A|H_1) = \frac{5}{12}$ a $P(A|H_2) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$. Vieme, že $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$. Chceme vypočítať $P(H_2|A)$. Z Bayesovho vzorca dostávame $P(H_2|A) = \frac{(1/5)\cdot(1/2)}{(1/5)\cdot(1/2)+(5/12)\cdot(1/2)} = \frac{12}{37}$.

Nezávislé javy

Definícia

Dva javy A a B nazývame **(vzájomne) nezávislými** *práve vtedy, keď pravdepodobnosť jedného z nich sa nemení, ak nastane druhý jav alebo keď pravdepodobnosť jedného z nich je nulová, t. j. nastane aspoň jeden z týchto štyroch prípadov:*

$$P(A|B) = P(A) \quad \vee \quad P(B) = 0 \quad \vee \quad P(B|A) = P(B) \quad \vee \quad P(A) = 0.$$

Veta

Nech $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole. Javy $A, B \in \tau$ sú nezávislé práve vtedy, keď

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Z nezávislosti javov A a B vyplýva aj nezávislosť týchto dvojíc javov:

$$\overline{A} \text{ a } B, \qquad A \text{ a } \overline{B}, \qquad \overline{A} \text{ a } \overline{B}.$$

Celkove nezávislé javy

Definícia

Systém javov $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \geq 2$, nazývame **celkove nezávislým** *práve vtedy, keď pravdepodobnosť, že nastane ľubovoľný z nich sa nemení, ak nastanú ľubovoľné z ostatných javov alebo keď pravdepodobnosť jedného z nich je nulová.*

Veta (Pravdepodobnosť prieniku celkove nezávislých javov)

Nech $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole. Ak systém javov A_1, A_2, $\ldots$, A_n, $n \geq 2$, je celkove nezávislým, tak pre každé $k \leq n$ platí

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Veta (Pravdepodobnosť zjednotenia celkove nezávislých javov)

Nech $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole. Ak systém javov A_1, A_2, $\ldots$, A_n, $n \geq 2$, je celkove nezávislým, tak

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \cdots \cdot P(\overline{A}_n).$$

Príklad

Štyria basketbalisti hádžu na kôš. Pravdepodobnosti úspešného zásahu u jednotlivých basketbalistov sú 0,8; 0,7; 0,85 a 0,9. Vypočítajte pravdepodobnosť, že

a) *všetci štyria trafia do koša,*
b) *ani jeden netrafí do koša,*
c) *aspoň jeden trafí do koša,*
d) *aspoň jeden netrafí do koša.*

Riešenie. Označme A_i jav, že i-tý basketbalista trafí do koša. Máme

$$P(A_1) = 0,8, \quad P(A_2) = 0,7, \quad P(A_3) = 0,85, \quad P(A_4) = 0,9.$$

Teda

a) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,85 \cdot 0,9 = 0,4284$
b) $P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot P(\overline{A}_4) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,15 \cdot 0,1 = 0,0009$
c) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot P(\overline{A}_4) = 0,9991$
d) $P(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3 \cup \overline{A}_4) = 1 - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = 0,5716$

Opakované nezávislé pokusy

Nech výsledkom nejakého pokusu je jav A. Opakujme za tých istých podmienok pokus n-krát, pričom predpokladáme, že tieto pokusy sú nezávislé, t. j. sú také, že výsledok každého z nich nemá vplyv na výsledok žiadneho predchádzajúceho pokusu a ani na výsledok žiadneho nasledujúceho pokusu. Inak povedané, pravdepodobnosť, že nastane jav A, je v každom pokuse rovnaká.

Veta (Bernoulliho veta)

Nech p je pravdepodobnosť toho, že pri danom pokuse nastane jav A a $P_{n,p}(k)$ je pravdepodobnosť toho, že pri n-násobnom nezávislom opakovaní daného pokusu nastane jav A práve k-krát. Potom platí tzv. **Bernoulliho vzorec***:*

$$P_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad \text{pre } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Príklad

Predpokladajme, že hodíme dve kocky 8 krát. Aká je pravdepodobnosť, že najviac trikrát bude súčet hodnôt na kockách rovný 7?

Riešenie. Súčet 7 môžeme hodiť 6 spôsobmi:

$$(1,6),\ (2,5), (3,4),\ (4,3),\ (5,2),\ (6,1).$$

Je 36 možností padnutia dvojice čísel na kockách, teda $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
Máme $n = 8,\ k = 0, 1, 2, 3$ a podľa Bernoulliho vzorca dostávame

$$P(A) = P_{8,\frac{1}{6}}(0) + P_{8,\frac{1}{6}}(1) + P_{8,\frac{1}{6}}(2) + P_{8,\frac{1}{6}}(3) = \binom{8}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 + \binom{8}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7$$

$$+\binom{8}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 + \binom{8}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0,96934.$$

Pojem náhodnej premennej

Pod **náhodnou premennou** budeme rozumieť takú premennú, ktorá svoje hodnoty nadobúda náhodne.
Príklady náhodnej premennej:

1. Súčet bodov hodených napr. na troch bežných hracích kockách (možné hodnoty: $3, 4, \ldots, 18$);
2. počet bodov, ktoré študent získa z písomky,
3. počet úspešných hodov do basketbalového koša,
4. počet výtlkov na ceste z Košíc do Prešova,
5. doba, ktorú študent strávi pri príprave na skúšku,
6. výška dospelého muža,
7. polčas rozpadu rádioaktívnej látky (nadobúda hodnoty z určitého intervalu).

Náhodné premenné delíme na

- **diskrétne, (1, 2, 3, 4)**
- **spojité. (5 ,6, 7)**

Definícia náhodnej premennej

Definícia

Pod **náhodnou premennou** rozumieme každé zobrazenie $X : \gamma \to \mathbb{R}$, kde γ je množina elementárnych javov a $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel. Pre každý elementárny jav E je zrejme $X(E)$ nejaké reálne číslo, ktoré nazývame **hodnotou náhodnej premennej pre elementárny jav E** alebo skrátene **hodnotou náhodnej premennej**.

Náhodná premenná priradí každému elementárnemu javu nejaké reálne číslo. Každému javu A priradí číselnú množinu tvorenú číslami, ktoré sú priradené elemen. javom, na ktoré sa jav A rozkladá.
Náhodné premenné – X, Y, X_1, X_2, ...
Hodnoty náhodných premenných – x, y, x_1, x_2, ...
Budeme predpokladať, že pre každé $a \in \mathbb{R}$ vieme určiť pravdepodobnosti typu:

1. $P(X = a)$, t. j. pravdepodobnosť toho, že hodnota náhodnej premennej X je rovná číslu a;
2. $P(X \leq a)$, t. j. pravdepodobnosť toho, že hodnoty náhodnej premennej X sú menšie alebo roxné ako číslo a;
3. $P(X \in I)$, t. j. pravdepodobnosť toho, že náhodná premenná X nadobúda hodnoty z intervalu I.

Distribučná funkcia náhodnej premennej

Definícia

Distribučná funkcia F **náhodnej premennej** X je funkcia, ktorá je pre každé $x \in \mathbb{R}$ určená predpisom

$$F(x) = P(X \leq x). \tag{15}$$

Veta (Vlastnosti distribučnej funkcie)

1. *Pre každé* $x \in \mathbb{R}$ *je* $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *a* $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$;
3. F *je neklesajúca funkcia, t. j. pre každé* $a < b$ *je* $F(a) \leq F(b)$;
4. F *je sprava spojitá pre diskrétnu náhodnú premennú a spojitá pre spojitú náhodnú premennú na celej množine reálnych čísel;*
5. *ak* $a < b$, *tak*

$$P(X \in (a,\, b\rangle) = P(a < X \leq b) = F(b) - F(a). \tag{16}$$

Diskrétna náhodná premenná

Definícia (Rozdelenie diskrétneho typu)

Náhodná premenná X má **rozdelenie diskrétneho typu**, ak existuje konečná alebo spočítateľná množina reálnych čísel $\mathcal{H}(X) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ taká, že pre každé $x_i \in \mathcal{H}(X)$ je daná pravdepodobnosť $P(X = x_i) = p_i$ a platí $\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1$. Množinu $\mathcal{H}(X)$ nazývame **obor hodnôt** náhodnej premennej X.

Náhodnú premennú X, pre ktorú je $\mathcal{H}(X) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, môžeme popísať tabuľkou:

$$\begin{array}{c||c|c|c|c} x_i & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline P(X = x_i) = p_i & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}, \tag{17}$$

ktorú nazývame **pravdepodobnostná tabuľka náhodnej premennej X**.
Iný spôsob zadania je **pravdepodobnostnou funkciou**

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x), & \text{ak } x = x_i \in \mathcal{H}(X); \\ 0, & \text{inak.} \end{cases} \tag{18}$$

Modus a stredná hodnota náhodnej premennej

Definícia

Modus diskrétnej náhodnej premennej X je najpravdepodobnejšia hodnota tejto náhodnej premennej. Označujeme $\mathcal{M}o(X)$.

$\mathcal{M}o(X)$ sa môže rovnať viacprvkovej množine. V krajnom prípade $\mathcal{M}o(X) = \mathcal{H}(X)$, ak je pravdepodobnosť rovnaká pre všetky hodnoty $x_i \in \mathcal{H}(X)$.

Definícia

Nech je daný zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X. Pod **strednou hodnotou náhodnej premennej** X rozumieme číslo $E(X)$, ktoré je definované pre diskrétnu náhodnú premennú vzťahom

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i \cdot p_i .$$

Disperzia

Definícia

Nech je daný zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X, ktorej stredná hodnota je $E(X)$. Pod **disperziou (rozptylom) náhodnej premennej X** rozumieme číslo $D(X)$ (ak existuje), ktoré je definované takto

$$D(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n(\infty)} (x_i - E(X))^2 p_i.$$

Pod **smerodajnou odchýlkou náhodnej premennej X** rozumieme číslo $\sigma(X)$, ktoré je definované takto

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{19}$$

Vlastnosti strednej hodnoty a disperzie

Veta

Nech X je náhodná premenná a nech a a b sú ľubovoľné konštanty. Potom

1. *ak $X = a$ je konštantná náhodná premenná, tak $E(X) = a$ a $D(X) = 0$;*
2. $E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$;
3. $E(X - E(X)) = 0$;
4. $D(a \cdot X) = a^2 \cdot D(X)$;
5. $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, *kde* $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i$.

Dôkaz. Dokážeme tvrdenie **5**:
$D(X) = E[(X - E(X))^2] = E[X^2 - 2 \cdot X \cdot E(X) + (E(X))^2] =$
$E(X^2) + E[-2 \cdot X \cdot E(X)] + E[(E(X))^2] = E(X^2) - 2 \cdot E(X) \cdot E(X) + [E(X)]^2 =$
$E(X^2) - [E(X)]^2$,

Príklad

Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej X so strednou hodnotou 3,7 je dané pravdepodobnostnou tabuľkou

x_i	1	2	3	4	x_5
p_i	0,1	p_2	0,3	0,35	0,2

. Určte:

a) *neznáme hodnoty x_5 a p_2;*
b) *disperziu a modus náhodnej premennej X;*
c) $P(X \geq 5)$ *a* $P(E(X) < X \leq 7)$;

Riešenie.
a) Hodnotu p_2 určíme zo vzťahu $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$.
Teda: $0,1 + p_1 + 0,3 + 0,35 + 0,2 = 1$, odtiaľ $p_2 = 0,05$.
Pre určenie hodnoty x_5 dosadíme do vzorca pre strednú hodnotu, ktorá je daná. Dostávame

$$1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,35 + 0,2 \cdot x_5 = 3,7 \Rightarrow x_5 = 6.$$

b) $D(X) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - E(X))^2 p_i = (1 - 3,7)^2 \cdot 0,1 + (2 - 3,7)^2 \cdot 0,05$
$+(3 - 3,7)^2 \cdot 0,3 + (4 - 3,7)^2 \cdot 0,35 + (6 - 3,7)^2 \cdot 0,2 = 2,11.$
Modus je najpravdepodobnejšia hodnota, teda $\mathcal{M}o(X) = 4$.
c) $P(X \geq 5) = P(X = 6) = 0,2$;
$P(E(X) < X \leq 7) = P(3,7 < X \leq 7) = P(X = 4) + P(X = 6) = 0,55.$

Príklad

Hádžeme dvoma kockami. Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnotu maxima z hodených hodnôt. Určte:

a) *zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);*

b) *distribučnú funkciu $F(x)$;*

c) $P(X < 4),\ P(X \geq 3),\ P(2 < X \leq 5)$,

d) *strednú hodnotu $E(X)$ a disperziu $D(X)$.*

Riešenie. a) Maximum hodených hodnôt môže byť 1,2,3,4,5 alebo 6. Teda $\mathcal{H}(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pre každú hodnotu z množiny $\mathcal{H}(X)$ vypočítame pravdepodobnosť, s ktorou je daná hodnota dosiahnutá.
Pre výpočet $P(X = 1)$ si treba uvedomiť, že maximum sa rovná 1 len v prípade, že na obidvoch kockách hodíme číslo 1, teda $m = 1$, $n = 36$. Odtiaľ $P(X = 1) = \frac{1}{36}$.
$P(X = 2) = \frac{3}{36}$, lebo maximum je rovné 2 pre dvojice (1,2), (2,1), (2,2).
Rovnakým spôsobom vypočítame zvyšné pravdepodobnosti. Výsledok zapíšeme do tabuľky

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

c) $P(X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$;
$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$;
$P(2 < X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$;
alebo inak podľa (16):
$P(2 < X \leq 5) = F(5) - F(2) = \frac{25}{36} - \frac{4}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$.

d) $E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot p_i = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36}$;

$D(X) = \sum_{i=1}^{6} (x_i - E(X))^2 p_i = (1 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{1}{36} + (2 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{3}{36} + (3 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{5}{36} + (4 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{7}{36} + (5 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{9}{36} + (6 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{11}{36} = \frac{2555}{1296}$.

Inak môžeme $D(X)$ vypočítať podľa vzťahu $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.
Vypočítame
$E(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 9 \cdot \frac{5}{36} + 16 \cdot \frac{7}{36} + 25 \cdot \frac{9}{36} + 36 \cdot \frac{11}{36} = \frac{791}{36}$ a dosadíme
$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{791}{36} - (\frac{161}{36})^2 = \frac{2555}{1296}$

Vstupy: Prirodzené číslo n a reálne číslo $p \in (0, 1)$.

Definícia

Náhodná premenná X má **binomické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami n a p** *práve vtedy, keď*
1. jej obor hodnôt je $\mathcal{H}(X) = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$;
2.

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ pre každé } x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}. \tag{20}$$

Používame pritom označenie $X \sim bino(n; p)$.

Veta

Ak $X \sim bino(n; p)$, tak

$$E(X) = n \cdot p, \qquad D(X) = n \cdot p \cdot q \quad a \quad \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}, \text{ kde } q = 1 - p. \tag{21}$$

Príklad

Predpokladajme, že hádžeme kockou. Vykonáme 4 hody. Nech X je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet hodov, pri ktorých hodíme číslo väčšie ako 4.

a) *zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);*

b) *strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X.*

Riešenie. a) Pravdepodobnosť, že pri hode kockou hodíme číslo väčšie ako 4, je $p = \frac{1}{3}$. Jedná sa o opakované nezávislé pokusy, náh. prem. X má binomické rozdelenie, teda $X \sim bino(4; \frac{1}{3})$. Máme $\mathcal{H}(X) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Vypočítame všetky pravdepodobnosti:

$P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot (\frac{1}{3})^0 \cdot (\frac{2}{3})^4 = \frac{16}{81}$; $P(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot (\frac{1}{3})^1 \cdot (\frac{2}{3})^3 = \frac{32}{81}$;

$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{2}{3})^2 = \frac{24}{81}$; $P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot (\frac{1}{3})^3 \cdot (\frac{2}{3})^1 = \frac{8}{81}$;

$P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot (\frac{1}{3})^4 \cdot (\frac{2}{3})^0 = \frac{1}{81}$.

Výsledky zapíšeme do tabuľky:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

b) $E(X) = n \cdot p = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $D(X) = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$.

Poznámka. Môžete si overiť, že rovnaké hodnoty dostaneme aj použitím všeobecných vzorcov pre $E(X)$ a $D(X)$.

Hypergeometrické rozdelenie pravdepodobnosti

Toto rozdelenie pravdepodobnosti môže byť charakterizované modelom, v ktorom je daná množina objektov M, pričom K objektov má určitú vlastnosť a $M - K$ objektov nemá túto vlastnosť. Z tejto množiny vyberieme bez vrátenia N objektov. Chceme vypočítať pravdepodobnosť, že medzi vybratými objektmi je x takých, ktoré majú túto vlastnosť.

Definícia

Náhodná premenná X má **hypergeometrické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami M, K a N** *práve vtedy, keď*

1. jej obor hodnôt je $\mathcal{H}(X) = \{\max\{0, K - M + N\}, \ldots, \min\{K, N\}\}$;

2.

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{N-x}}{\binom{M}{N}} \text{ pre každé } x \in \mathcal{H}(X). \tag{23}$$

Používame označenie $X \sim hyge(M, K, N)$.

Veta

Ak $X \sim hyge(M, K, N)$, tak

$$E(X) = N \cdot \frac{K}{M}, \qquad D(X) = \frac{(M-N)\cdot N \cdot K}{(M-1)\cdot M}\left(1 - \frac{K}{M}\right). \tag{24}$$

Príklad

Triedny učiteľ zistil, že 12 z 30 študentov býva na stredoškolskom internáte. Náhodne vyberieme 10 študentov. Aká je pravdepodobnosť, že

a) *6 študenti bývajú na stredoškolskom internáte,*

b) *najviac 3 študenti bývajú na stredoškolskom internáte.*

Riešenie. $M = 30;\ N = 10;\ K = 12.$

a) $P(X=6) = \dfrac{\binom{12}{6}\cdot\binom{18}{4}}{\binom{30}{10}} = 0,0941$

b) $P(X \le 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$

$$\frac{\binom{12}{0}\cdot\binom{18}{10}}{\binom{30}{10}} + \frac{\binom{12}{1}\cdot\binom{18}{9}}{\binom{30}{10}} + \frac{\binom{12}{2}\cdot\binom{18}{8}}{\binom{30}{10}} + \frac{\binom{12}{3}\cdot\binom{18}{7}}{\binom{30}{10}} =$$

$0,00145 + 0,0194 + 0,0961 + 0,2330 = 0,34955$

Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti

Poissonovo rozdelenie je rozdelenie diskrétnej náhodnej premennej X, ktoré má nasledovné vlastnosti:

- Experiment pozostáva z počítania, koľkokrát jav nastane v danom intervale. Interval môže byť interval času, vzdialenosti, plochy, objemu...
- Pravdepodobnosť, že k javu dôjde, je rovnaká vo všetkých intervaloch rovnakej dĺžky.
- Počet výskytov javu v jednom intervale je nezávislý na počte výskytov v iných intervaloch.
- Priemerný počet výskytov javu je priamo úmerný dĺžke intervalu.
- Priemerný počet výskytov javu v danom intervale je známy a rovná sa číslu λ.

Definícia

Náhodná premenná X má **Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom λ** *práve vtedy, keď*

1. jej obor hodnôt je $\mathcal{H}(X) = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$;

2.

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{x!} \text{ pre každé } x \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{25}$$

Používame pritom označenie $X \sim poiss(\lambda)$.

Veta

Ak $X \sim poiss(\lambda)$, tak

$$E(X) = \lambda, \qquad D(X) = \lambda \quad a \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}. \tag{26}$$

Príklad

Rybár chytí priemerne 2 ryby v priebehu 3 hodín. Predpokladajme, že rybár strávi pri rybníku 7 hodín. Aká je pravdepodobnosť, že chytí
a) práve 4 ryby, b) aspoň 3 ryby, c) aspoň 3, ale najviac 6 rýb?

Riešenie. $\lambda = 7 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$.

a) $P(X = 4) = \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^4}{4!} = 0,1858$

b) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] =$
$1 - [\dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^0}{0!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^1}{1!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^2}{2!}] = 0,8443$

c) $P(3 \leq X \leq 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) =$
$\dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^3}{3!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^4}{4!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^5}{5!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^6}{6!} = 0,6534$

Spojitá náhodná premenná a jej hustota pravdepodobnosti

Príklady spojitej náhodnej premennej:

- doba, ktorú študent strávi pri príprave na skúšku,
- výška človeka,
- hmotnosť dieťaťa daného veku,
- polčas rozpadu rádioaktívnej látky,
- fyzikálne vlastnosti látok, napr. pevnosť, pružnosť, teplota topenia,. . .

Definícia

Náhodnú premennú X nazývame **spojitou** práve vtedy, keď existuje taká nezáporná a na množine $\mathbb{R}$ integrovateľná funkcia f, pre ktorú platí:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad x \in (-\infty, \infty), \tag{27}$$

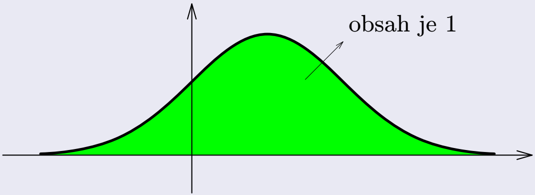
kde F je distribučná funkcia náhodnej premennej X. Takejto funkcii f hovoríme **hustota pravdepodobnosti náhodnej premennej** X.

Poznámka: Distribučná funkcia $F(x)$ je definovaná rovnako ako pre diskrétnu náhodnú premennú vzťahom $F(x) = P(X \leq x)$.

Veta (Vlastnosti hustoty pravdepodobnosti)

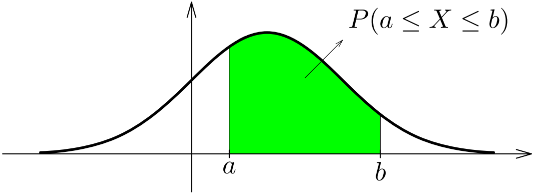
Pre spojitú náhodnú premennú platí:

1. *ak hodnota* $f(x)$ *existuje, tak* $f(x) \geq 0$;
2. *ak existuje derivácia* $F'(x)$, *tak* $F'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$;
3. *tzv. „normalizačná podmienka“:* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$,



Ďalšie vlastnosti spojitej náhodnej premennej:

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
2. distribučná funkcia $F(x)$ je spojitá na celej množine reálnych čísel;
3. pre každé $a \in \mathbb{R}$ je $P(X = a) = 0$;
4. $$P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = \\ = P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{28}$$



Graf hustoty pravdepodobnosti $f(x)$

Stredná hodnota a disperzia spojitej náhodnej premennej

Definícia

Nech je daný zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X. Pod **strednou hodnotou** spojitej náhodnej premennej X rozumieme číslo $E(X)$, ktoré je definované pre spojitú náhodnú premennú vzťahom

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx.$$

Pod **disperziou (rozptylom) náhodnej premennej** X rozumieme číslo $D(X)$, ktoré je definované vzťahom

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\, dx.$$

Pod **smerodajnou odchýlkou náhodnej premennej** X rozumieme číslo $\sigma(X)$, ktoré je definované takto

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{29}$$

Príklad

Daná je funkcia $F(x)=\begin{cases} a & \text{pre } x<-4, \\ bx+c & \text{pre } x\in\langle -4;2\rangle. \\ d & \text{pre } x>2. \end{cases}$ *Určte:*

a) *pre aké hodnoty* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *je* F *distribučnou funkciu náh. prem.* X*;*

b) *hustotu pravdepodobnosti náhodnej premennej* X*;*

c) $P(X\leq 0),\ P(-5\leq X<-3)$*;*

d) *strednú hodnotu* $E(X)$ *a disperziu* $D(X)$*.*

Riešenie. a)Pre výpočet koeficientov a, d použijeme vzťahy $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$.

Dostávame $a=0,\ d=1$. Koeficienty b, c určíme na základe spojitosti funkcie $F(x)$.

$F(x)$ je spojitá v bode $x=-4$, ak platí $-4b+c=0$.

$F(x)$ je spojitá v bode $x=2$, ak platí $2b+c=1$.

Dostávame sústavu dvoch lineárnych rovníc, riešením ktorej je $b=\frac{1}{6},\quad c=\frac{2}{3}$.

Teda $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{pre } x<-4, \\ \frac{1}{6}x+\frac{2}{3} & \text{pre } x\in\langle -4;2\rangle, \\ 1 & \text{pre } x>2. \end{cases}$

b) Hustotu pravdepodobnosti $f(x)$ určíme zo vzťahu $f(x) = F^{'}(x)$. Dostávame

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < -4, \\ \frac{1}{6} & \text{pre } x \in \langle -4; 2 \rangle, \\ 0 & \text{pre } x > 2. \end{cases}$$

c) $P(X \leq 0) = F(0) = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$,
$P(-5 \leq X < -3) = F(-3) - F(-5) = \left(\frac{1}{6} \cdot (-3) + \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{1}{6}$.

d) $E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx =$

$$\int\limits_{-\infty}^{-4} 0 \cdot x\, dx + \int\limits_{-4}^{2} \frac{1}{6} \cdot x\, dx + \int\limits_{2}^{\infty} 0 \cdot x\, dx = 0 + \left[\frac{1}{6} \frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{2} = \frac{1}{12}(4 - 16) = -1$$

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\, dx = \int\limits_{-4}^{2} \frac{1}{6} \cdot (x+1)^2\, dx = \left[\frac{1}{6} \cdot \frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-4}^{2} =$$

$$\frac{1}{18}(27 - (-27)) = \frac{54}{18} = 3$$

Príklad

Majme danú funkciu f predpisom $f(x) = \begin{cases} k \cdot (x+1) & \textit{pre } x \in \langle -1, 0), \\ k & \textit{pre } x \in \langle 0, 2), \\ 0 & \textit{pre } x \notin \langle -1; 2\rangle; \end{cases}$

kde $k \in R$. Určme:

a) konštantu k tak, aby funkcia f bola hustotou pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej X;

b) predpis distribučnej funkcie tejto náhodnej premennej;

c) $P(0 < X)$.

a) Hodnotu k určíme z normalizačnej podmienky. Vypočítame

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot \mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} k \cdot (x+1) \cdot \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} k \cdot \mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} 0 \cdot \mathrm{d}x =$$

$$0 + k \cdot \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} + k \cdot \left[x\right]_{0}^{2} + 0 = \frac{1}{2}k + 2k$$

Podľa normalizačnej podmienky $\frac{1}{2}k + 2k = 1 \Rightarrow k = 0{,}4$. Dostávame

$$f(x) = \begin{cases} 0,4 \cdot (x+1) & \text{pre } x \in \langle -1, 0), \\ 0,4 & \text{pre } x \in \langle 0, 2), \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle -1; 2\rangle; \end{cases}$$

b) Na základe vzťahu $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ je

- pre $x \in (-\infty, -1)$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$;
- pre $x \in \langle -1, 0)$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0\,\mathrm{d}t + \int\limits_{-1}^{x} 0{,}4 \cdot (t+1)\,\mathrm{d}t = 0 + 0,4\left[\frac{t^2}{2} + t\right]_{-1}^{x} =$
  $0,4(\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} + 1) = 0{,}2x^2 + 0,4x + 0,2 = 0,2(x+1)^2$;
- pre $x \in \langle 0, 2)$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0\,\mathrm{d}t + \int\limits_{-1}^{0} 0{,}4 \cdot (t+1)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{x} 0{,}4\,\mathrm{d}t =$
  $0 + 0,4\left[\frac{t^2}{2} + t\right]_{-1}^{0} + 0,4\left[t\right]_{0}^{x} = 0{,}2(2x+1)$; (po úprave)
- pre $x \in \langle 2, \infty)$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0\,\mathrm{d}t + \int\limits_{-1}^{0} 0{,}4 \cdot (t+1)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{2} 0{,}4\,\mathrm{d}t + \int\limits_{2}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 1$

Teda

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x \in (-\infty, -1); \\ 0{,}2 \cdot (x+1)^2 & \text{pre} \quad x \in \langle -1, 0), \\ 0{,}2 \cdot (2x+1) & \text{pre} \quad x \in \langle 0, 2), \\ 1 & \text{pre} \quad x \in \langle 2, \infty). \end{cases}$$

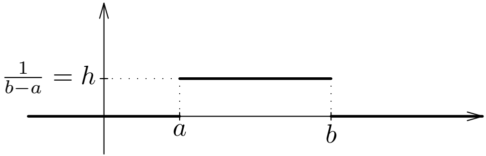
c) $P(X < 0) = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} 0,4 \cdot (x+1) \cdot \mathrm{d}x = 0,4 \cdot \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} = 0,2.$

Definícia

Náhodná premenná X má **spojité rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti na intervale $\langle a, b\rangle$** *práve vtedy, keď jej hustota f je určená predpisom*

$$f(x) = \begin{cases} h & \text{pre } x \in \langle a, b\rangle, \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle a, b\rangle, \end{cases} \tag{30}$$

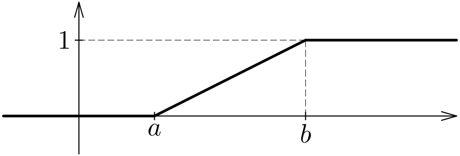
pre nejaké $h \in R$. Používame pritom označenie $X \sim unif(a; b)$.



Obr.: Graf hustoty pravdepodobnosti $f(x)$

Nájdenie predpisu pre distribučnú funkciu F:

- pre $x \in (-\infty, a)$: $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \, \mathrm{d}t = 0;$
- pre $x \in \langle a, b \rangle$: $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0 \, \mathrm{d}t + \int\limits_{a}^{x} \frac{1}{b-a} \mathrm{d}t = \frac{x-a}{b-a};$
- pre $x \in (b, \infty)$: $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0 \, \mathrm{d}t + \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{b-a} \mathrm{d}t + \int\limits_{b}^{x} 0 \, \mathrm{d}t = 1.$



Obr.: Graf distribučnej funkcie $F(x)$

Veta

Ak $X \sim unif(a,b)$, tak

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad a \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\cdot\sqrt{3}} \approx 0{,}2887\cdot(b-a). \quad (31)$$

Príklad

Spoločnosť dodáva tovar v balíkoch s hmotnosťou 2 kg až 20 kg. Bolo zistené, že hmotnosť balíka má rovnomerné spojité rozdelenie medzi 2 kg a 20 kg.

a) *Aká je pravdepodobnosť, že balík má hmotnosť medzi 10 kg a 15 kg?*

b) *Určte hmotnosť m, ktorá je prekročená s pravdepodobnosťou 0,7.*

Riešenie.

a) $P(10 \le X \le 15) = F(15) - F(10) = \frac{15-2}{20-2} - \frac{10-2}{20-2} = \frac{5}{18} = 0,2778$

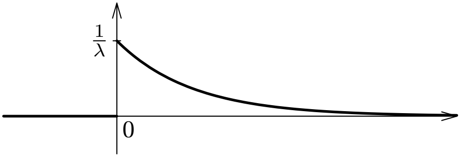
b) $P(X > m) = 0,7 \Rightarrow 1 - P(X \le m) = 0,7 \Rightarrow 1 - F(m) = 0,7 \Rightarrow F(m) = 0,3.$
Teda $\frac{m-2}{18} = 0,3 \Rightarrow m = 7,4$.

Definícia

Náhodná premenná X má **exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom λ** $(\lambda \in \mathbb{R}^+)$ *práve vtedy, keď jej hustota f je určená predpisom*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{pre } x \geq 0, \\ 0 & \text{pre } x < 0, \end{cases} \tag{32}$$

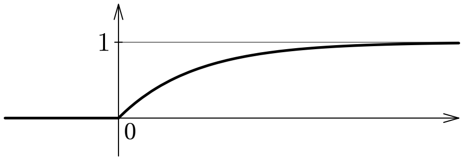
Používame pritom označenie $X \sim exp(\lambda)$.



Obr.: Hustota pravdepodobnosti $f(x)$

Distribučná funkcia je daná predpisom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{pre } x \geq 0. \end{cases} \tag{33}$$



Obr.: Distribučná funkcia $F(x)$

Veta

Ak $X \sim exp(\lambda)$, tak $E(X) = \lambda$, $\quad D(X) = \lambda^2 \quad$ a $\quad \sigma(X) = \lambda$.

Príklad

Pokiaľ zákazník volá na zákaznícku linku, doba, ktorú musí zákazník počkať, kým ho spoja s operátorom, má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 4 minúty.

a) *Aká je pravdepodobnosť, že zákazník bude čakať na spojenie maximálne 3 minúty?*

b) *Aká je pravdepodobnosť, že zákazník bude čakať na spojenie aspoň 5 minút?*

c) *Aká je pravdepodobnosť, že zákazník bude čakať na spojenie viac ako 3 minúty, ale menej ako 6 minút?*

d) *Určte dobu čakania, ktorá nebude prekročená s pravdepodobnosťou 0,9.*

Riešenie. Máme $E(X) = \lambda = 4$.

a) $P(X \leq 3) = F(3) = 1 - e^{-\frac{3}{4}} = 0,52763$

a) $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-\frac{5}{4}}) = e^{-\frac{5}{4}} = 0,28650$

c)$P(3 < X < 6) = F(6) - F(3) = (1 - e^{-\frac{6}{4}}) - (1 - e^{-\frac{3}{4}}) = 0,24923$

d) Označme ako t hľadanú dobu čakania. Máme $P(X < t) = 0,9 \Rightarrow$
$F(t) = 0,9 \Rightarrow 1 - e^{-\frac{t}{4}} = 0,9 \Rightarrow e^{-\frac{t}{4}} = 0,1 \Rightarrow t = -4 \cdot \ln 0,1 = 9,21.$
S pravdepodobnosťou 0,9 nebude prekročená doba čakania na spojenie 9,21 minút.

Normálne (Gaussovo) rozdelenie pravdepodobnosti

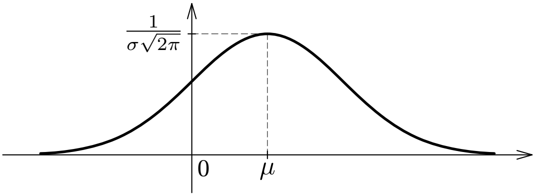
Vstup: Dve reálne čísla: $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$.

Definícia

Náhodná premenná X má **normálne (Gaussovo) rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami μ a σ** *práve vtedy, keď jej hustota f je určená predpisom*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \textit{pre každé } x \in R. \tag{34}$$

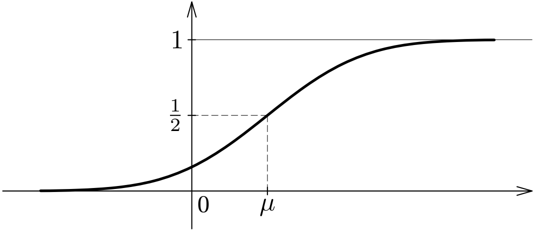
Používame pritom označenie $X \sim norm(\mu, \sigma)$ alebo $X \sim N(\mu, \sigma)$.



Obr.: Hustota pravdepodobnosti $f(x)$

Distribučná funkcia

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{pre každé } x \in \mathbb{R}. \tag{35}$$



Obr.: Distribučná funkcia $F(x)$

Veta

Ak $X \sim norm(\mu, \sigma)$, tak

$$E(X) = \mu, \qquad D(X) = \sigma^2 \quad a \quad \sigma(X) = \sigma. \tag{36}$$

Normovaná náhodná premenná

Definícia

Hovoríme, že náhodná premenná Y je **normovanou náhodnou premennou** práve vtedy, keď pre ňu platí $E(Y) = 0$ a $D(Y) = 1$.

Veta (Normovanie náhodnej premennej)

Nech X je náhodná premenná so známou strednou hodnotou a nenulovou disperziou. Potom náhodná premenná

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \tag{37}$$

je normovanou náhodnou premennou.

Normovaním náhodnej premennej $X \sim norm(\mu, \sigma)$ dostaneme náhodnú premennú

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}, \qquad Y \sim norm(0, 1).$$

Hustota pravdepodobnosti a distribučná funkcia normovanej náhodnej premennej

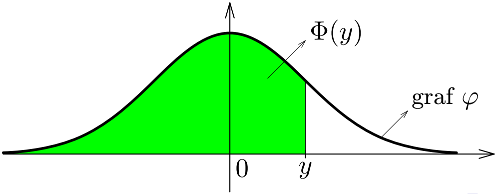
Hustota pravdepodobnosti φ normovanej náhodnej premennej Y je zrejme daná predpisom

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \qquad \text{pre každé } y \in \mathbb{R} \tag{38}$$

Distribučná funkcia Φ normovanej náhodnej premennej Y je daná predpisom

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \qquad \text{pre každé } y \in R \tag{39}$$

Číslo $\Phi(y)$ určuje obsah vyznačeného útvaru.



Veta (Vlastnosti funkcií $\varphi(y)$ a $\Phi(y)$)

1. *Funkcia* $\varphi(y)$ *je párna.*
2. $\Phi(-y) = 1 - \Phi(y)$ *pre každé* $y \in R$.
3. $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
4. $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

Veta

Ak $X \sim norm(\mu, \sigma)$, *tak pre ľubovoľné* $\varepsilon > 0$ *platí*

$$P(|X - \mu| < \varepsilon) = P(\mu - \varepsilon < X < \mu + \varepsilon) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1, \tag{40}$$

špeciálne pre $\varepsilon = 3\sigma$ *je*

$$P(|X - \mu| < 3\sigma) = P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 2 \cdot \Phi(3) - 1 \approx 0{,}9973 \tag{41}$$

Pravidlo troch sigma: v intervale $\mu \pm 3\sigma$ ležia takmer všetky hodnoty (presnejšie $99,73\,\%$) náhodnej premennej $X \sim norm(\mu, \sigma)$.

Príklad

Fabrika má stroj, ktorý plní kukuričné vločky do krabíc, ktoré sa predávajú ako 200 g balenia. Ak hmotnosť balenia má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 200 gramov a smerodajnou odchýlkou 15 gramov. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraná krabica má obsah s hmotnosťou

a) *menej ako 207 gramov,*

b) *viac ako 190 gramov,*

c) *medzi 180 a 210 gramov.*

Riešenie. Máme dané hodnoty $\mu = 200, \ \sigma = 15$. Hodnoty funkcie $\Phi(x)$ budeme hľadať v tabuľke s názvom **Distribučná funkcia normovaného náhodného rozdelenia**, ktorá je súčasťou súboru s názvom **NMPaMŠ-Štatistické tabuľky.**

a) $P(X < 207) = F(207) = \Phi(\frac{207-200}{15}) = \Phi(0,47) = 0,68082$ (hodnotu nájdeme v riadku prislúchajúcom hodnote 0,4 a stĺpci prislúchajúcom hodnote 7 (druhé desatinné miesto po správnom zaokrúhlení))

b) $P(X > 190) = 1 - P(X \leq 190) = 1 - F(190) = 1 - \Phi(\frac{190-200}{15}) =$
$1 - \Phi(-0,67) = 1 - (1 - \Phi(0,67)) = \Phi(0,67) = 0,74857$

c)$P(180 < X < 210) = F(210) - F(180) = \Phi(\frac{210-200}{15}) - \Phi(\frac{180-200}{15}) =$
$\Phi(0,67) - \Phi(-1,33) = \Phi(0,67) - (1 - \Phi(1,33)) = \Phi(0,67) - 1 + \Phi(1,33) =$
$0,74857 - 1 + 0,90824 = 0,65681$

Matematická štatistika

Matematická štatistika skúma určitý **štatistický znak** (zárobok, hmotnosť, doba sledovania televízie,...) pre každú **štatistickú jednotku**, t. j. pre každý objekt skúmania.
Základný súbor, množina štatistických jednotiek, ktorá je predmetom skúmania.
Náhodný výber – vybraná vzorka, na ktorej sa zistí skúmaný znak a zo získaných údajov sa urobí zovšeobecnenie vo forme štatistického záveru o celom základnom súbore.
Hladina významnosti $\alpha \in (0,1)$ – pravdepodobnosť toho, že náš štatistický záver je chybný.
Koeficient spoľahlivosti $\gamma = 1 - \alpha$ – pravdepodobnosť správneho záveru.
Budeme sa zaoberať týmito hlavnými úlohami štatistického skúmania:

a) odhady a intervaly spoľahlivosti parametrov základného súboru;
b) testovanie štatistických hypotéz.

Vlastnosti náhodného výberu:

1. každá jednotka základného súboru by mala rovnakú šancu dostať sa do náhodného výberu;
2. náhodný výber musí mať dostatočný počet prvkov vo vzťahu k počtu prvkov základného súboru.

Rozsah náhodného výberu – počet štatistických jednotiek v náhodnom výbere.
Zber dát – zisťovanie štatistického znaku na prvkoch náhodného výberu.
Triedenie dát:

- **Prosté triedenie** – usporiadanie podľa veľkosti $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, kde x_i sú namerané hodnoty.
- **Triedenie podľa početnosti** – pre každdú nameranú hodnotu x_j je n_j počet výskytov hodnoty x_j medzi nameranými hodnotami, napr.

x_j	167	170	174	175	178	180
n_j	1	3	5	6	3	2

,

- **intervalové triedenie** – máme systém intervalov, každá nameraná hodnota x_i leží práve v jednom intervale. Intervalová frekvencia n_j –počet hodnôt v I_j

I_j	$16-20$	$20-24$	$24-28$	$28-32$	$32-36$
n_j	2	7	5	4	1

Výberové charakteristiky

Definícia

Nech sú dané namerané hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *ktoré sú získané z náhodného výberu* V_n.

Výberový priemer náhodného výberu V_n *je číslo*

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ *pre prosté triedenie,*

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j x_j$ *pre triedenie podľa početnosti.* $(n = \sum\limits_{j=1}^{k} n_j)$

Modifikovaný výberový rozptyl (disperzia) náhodného výberu V_n *je číslo*

$s^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ *pre prosté triedenie,*

$s^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{k}(x_j - \overline{x})^2\, n_j$ *pre triedenie podľa početnosti.*

Modifikovaná výberová odchýlka náhodného výberu V_n *je číslo* $s^* = \sqrt{s^{*2}}$

Príklad

Boli namerané nasledujúce hodnoty výšok slovenských modeliek:

x_j	167	170	174	175	178	180
n_j	1	3	5	6	3	2

.

Určte výberový priemer, modifikovaný výberový rozptyl a modifikovanú výberovú odchýlku.

Riešenie. Výberové charakteristiky sú:

$\overline{x} = \frac{1}{20} \cdot (167 \cdot 1 + 170 \cdot 3 + 174 \cdot 5 + 175 \cdot 6 + 178 \cdot 3 + 180 \cdot 2) = 174,55$

$$s^{*2} = \frac{1}{19} \cdot \Big((167 - 174,55)^2 \cdot 1 + (170 - 174,55)^2 \cdot 3 + (174 - 174,55)^2 \cdot 5 +$$

$$(175 - 174,55)^2 \cdot 6 + (178 - 174,55)^2 \cdot 3 + (180 - 174,55)^2 \cdot 2 \Big) = 11,4184$$

$s^{*} = \sqrt{s^{*2}} = \sqrt{11,4184} = 3,3791$

Bodové odhady parametrov základného súboru

Parametre základného súboru sú isté veličiny, ktoré ho charakterizujú a sú určené konkrétnymi hodnotami sledovaného znaku všetkých štatistických jednotiek celého základného súbor Vo väčšine prípadov je nereálne získať ich skutočné hodnoty. Môžeme ich však prostredníctvom náhodných výberov odhadnúť.
Nech Q je sledovaný parameter základného súboru (napr. stredná hodnota μ, smerodajná odchýlka σ atď.) a $\hat{Q}_n$ je výberová charakteristika náhodného výberu V_n, kde n označuje rozsah náhodného výberu (napr. $\overline{x}$, s atď.). Pod **bodovým odhadom parametra Q** rozumieme takú výberovú charakteristiku $\hat{Q}_n$, ktorá nadobúda hodnoty blízke skutočnej hodnote parametra Q. Tento bodový odhad nazývame **nevychýleným** práve vtedy, keď $E(\hat{Q}_n) = Q$. Zapisujeme prirodzeným spôsobom: $Q \approx \hat{Q}_n$.

Veta

Výberový priemer $\overline{x}$ je nevychýleným odhadom strednej hodnoty μ a modifikovaný výberový rozptyl s^{*2} je nevychýleným odhadom rozptylu σ^2 základného súboru t. j.

$$\mu \approx \overline{x} \qquad a \qquad \sigma^2 \approx s^{*2}. \tag{42}$$

Pre základný súbor z predchádzajúceho príkladu máme
$\mu \approx 174,55;\ \sigma^2 \approx 11,4184.$

Predpokladajme, že $Y \sim norm(0,1)$. Nech $\alpha \in (0,1)$ je dané reálne číslo. Hľadáme číslo k_α, pre ktoré platí

$$P(|Y| > k_\alpha) = \alpha. \tag{43}$$

Pomocou opačného javu môžeme (43) zapísať v tvare

$$P(-k_\alpha \leq Y \leq k_\alpha) = 1 - \alpha \tag{44}$$

a keďže ide o normovanú spojitú náhodnú premennú, dostaneme

$$P(-k_\alpha \leq Y \leq k_\alpha) = 2 \cdot \Phi(k_\alpha) - 1,$$

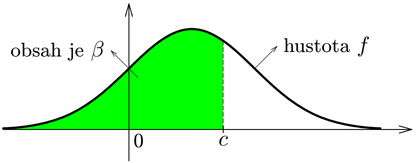
Z posledných dvoch rovností je $1 - \alpha = 2 \cdot \Phi(k_\alpha) - 1$ a odtiaľ $\Phi(k_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, čo znamená, že

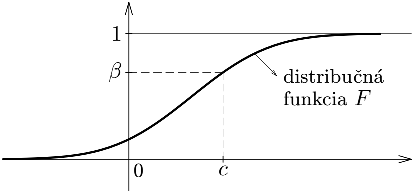
$$k_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \tag{45}$$

kde $\Phi^{-1}(x)$ je inverzná funkcia k distribučnej funkcii $\Phi(x)$. V matematickej štatistike sa k_α zvykne označovať takto:

$$k_\alpha = y_{1-\frac{\alpha}{2}} \tag{46}$$

Nech f je hustota a F distribučná funkcia náhodnej premennej X. Potom pre ľubovoľné $\beta \in (0,1)$ existuje také najmenšie reálne číslo c, že $F(c) \geq \beta$: t. j. c je najmenšie reálne číslo, pre ktoré je obsah vyšrafovanej časti na obrázku aspoň β.





Definícia

Najmenšie reálne číslo c, že $F(c) \geq \beta$ nazývame **β-kvantilom** *rozdelenia pravdepodobnosti F a označujeme ho $c = F^{-1}(\beta)$.*

Názov RP	NP	DF	β-kvantil
Normovaná normálna	Y	Φ	$\Phi^{-1}(\beta) = y_\beta$
Chí-kvadrát	χ^2	χ^2_n	$\chi^2_{\beta,n}$
Studentovo t	T	t_n	$t_{\beta,n}$
Fisherovo	F	$F_{n,m}$	$F_{\beta;n,m}$

Intervalové odhady parametrov základného súboru

Hlavná myšlienka intervalového odhadu parametra Q základného súboru spočíva v nájdení istého intervalu I, v ktorom leží s nami zvolenou pravdepodobnosťou p skutočná hodnota parametra Q. Potom platí, že do I na $100 \cdot p$ percent patrí skutočná hodnota Q.

Definícia

Intervalovým odhadom parametra Q základného súboru na hladine významnosti $\alpha \in (0,1)$ *nazývame taký „číselný interval" $\langle Q_1, Q_2 \rangle$, v ktorom parameter Q leží s pravdepodobnosťou $1-\alpha$, t. j.*

$$P(Q_1 \leq Q \leq Q_2) = 1 - \alpha, \tag{47}$$

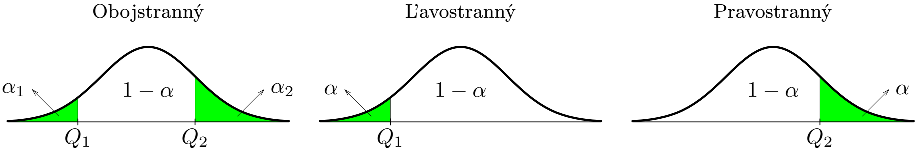
kde Q_1 a Q_2 je dvojica čísel, ktorá závisí od realizovaného náhodného výberu V_n. Interval $\langle Q_1, Q_2 \rangle$ nazývame aj **$100 \cdot (1-\alpha)$-percentný interval spoľahlivosti pre parameter Q** *alebo skrátene* **obojstranný interval spoľahlivosti**. *Číslo $(1-\alpha)$ nazývame* **koeficient spoľahlivosti intervalového odhadu $\langle Q_1, Q_2 \rangle$**.

Definícia

Jednostranné intervaly spoľahlivosti pre parameter Q *definujeme nasledovne:*

$$\begin{cases} \textbf{ľavostranný interval } \langle Q_1, \infty) : \; P(Q_1 \leq Q) = 1 - \alpha \\ \textbf{pravostranný interval } (-\infty, Q_2\rangle : \; P(Q \leq Q_2) = 1 - \alpha. \end{cases} \tag{48}$$

Grafická interpretácia oboch definícií je na obrázku. Pri obojstrannom intervale spoľahlivosti je $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. V prípade symetrického obojstranného intervalu spoľahlivosti je $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$.



V ďalšom texte bude na pozícii parametra Q vystupovať stredná hodnota μ alebo rozptyl σ^2.

Intervaly spoľahlivosti

Veta (Intervaly spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ, ak σ poznáme)

Nech náhodná premenná X základného súboru má normálne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami μ a σ (t. j. $X \sim norm(\mu, \sigma)$). Potom symetrický obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ na hladine významnosti α má tvar

$$\mu \in \left\langle \underbrace{\overline{x} - y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{Q_1}, \underbrace{\overline{x} + y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{Q_2} \right\rangle \qquad (49)$$

a jednostranné intervaly majú tvar

$$\mu \in \left\langle \underbrace{\overline{x} - y_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{Q_1}, \infty \right), \quad \textit{resp.} \quad \mu \in \left(-\infty, \underbrace{\overline{x} + y_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{Q_2} \right\rangle, \qquad (50)$$

kde $\overline{x}$ je výberový priemer, n je rozsah výberu a $y_{1-\frac{\alpha}{2}}$ a $y_{1-\alpha}$ sú kvantily normovaného normálneho rozdelenia.

Veta (Intervaly spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ, ak σ nepoznáme)

Nech náhodná premenná X základného súboru má normálne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami μ a σ (t. j. $X \sim norm(\mu, \sigma)$). Potom obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ na hladine významnosti α má tvar

$$\mu \in \left\langle \underbrace{\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}}}_{Q_1}, \underbrace{\overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}}}_{Q_2} \right\rangle \tag{51}$$

a jednostranné intervaly majú tvar

$$\mu \in \left\langle \underbrace{\overline{x} - t_{1-\alpha,\, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}}}_{Q_1}, \infty \right), \ \textit{resp.}\ \mu \in \left(-\infty, \underbrace{\overline{x} + t_{1-\alpha,\, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}}}_{Q_2} \right\rangle, \tag{52}$$

kde $\overline{x}$ je výberový priemer, s^* je výberová modifikovaná smerodajná odchýlka, n je rozsah výberu a $t_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1}$ a $t_{1-\alpha,\, n-1}$ sú kvantily t-rozdelenia pravdepodobnosti.

Veta (Intervaly spoľahlivosti pre rozptyl σ^2)

Nech náhodná premenná X základného súboru má normálne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami μ a σ (t. j. $X \sim norm(\mu, \sigma)$). Potom obojstranný interval spoľahlivosti pre rozptyl σ^2 na hladine významnosti α má tvar

$$\sigma^2 \in \left\langle \underbrace{\frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\,n-1}}}_{Q_1},\quad \underbrace{\frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\,n-1}}}_{Q_2} \right\rangle \tag{53}$$

a jednostranné intervaly majú tvar

$$\sigma^2 \in \left\langle \underbrace{\frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha,\,n-1}}}_{Q_1},\quad \infty \right) \quad \textit{resp.} \quad \sigma^2 \in \left(0\,,\quad \underbrace{\frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{\alpha,\,n-1}}}_{Q_2} \right\rangle \tag{54}$$

kde s^{*2} je výberový modifikovaný rozptyl, n je rozsah výberu a $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\,n-1}$ a $\chi^2_{1-\alpha,\,n-1}$ sú kvantily rozdelenia pravdepodobnosti χ^2 s $n-1$ stupňami voľnosti.

Príklad

Boli namerané nasledujúce hodnoty výšky slovenských modeliek:

x_j	167	170	174	175	178	180
n_j	1	3	5	6	3	2

.

Určte:
a) 90%- ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;
b) 95%- ný pravostranný interval spoľahlivosti pre rozptyl a smerodajnú odchýlku.

Riešenie. Z predchádzajúceho príkladu máme
$\overline{x} = 174,55, \quad s^{*2} = 11,4184, \quad s^* = \sqrt{s^{*2}} = \sqrt{11,4184} = 3,3791.$
a) Máme $n = 20$, $1 - \alpha = 0,9 \Rightarrow \alpha = 0,1$ a σ^2 je neznáme. Dostávame

$$\mu \in \langle \bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}}, \bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \rangle$$

Hodnotu $t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = t_{0,95;19}$ nájdeme v tabuľke **Kvantily rozdelenia t (t_P)** nasledovne: Nájdeme riadok prislúchajúci hodnote $k = 19$ a stĺpec prislúchajúci hodnote $P = 0,95$, teda $t_{0,95;19} = 1,7291$. Dostávame

$$\mu \in \langle 174,55 - 1,7291 \cdot \frac{3,3791}{\sqrt{20}},\ 174,55 + 1,7291 \cdot \frac{3,3791}{\sqrt{20}} \rangle \approx \langle 173,2365; 175,8634 \rangle.$$

b) Máme $1-\alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$. Pre rozptyl dostávame:

$$\sigma^2 \in \left(0, (n-1) \cdot \frac{s^{*2}}{\chi^2_{\alpha,n-1}}\right\rangle$$

Hodnotu $\chi^2_{\alpha,n-1} = \chi^2_{0,05;19}$ nájdeme v tabuľke **Kvantily rozdelenia chi-kvadrát** nasledovne: Nájdeme riadok prislúchajúci hodnote $k = 19$ a stĺpec prislúchajúci hodnote $P = 0,05$, teda $\chi^2_{0,05;19} = 10,117$. Dostávame

$$\sigma^2 \in \left\langle 0;\ \frac{19 \cdot 11,4184}{10,117}\right\rangle \approx \langle 0;\ 21,444\rangle.$$

Pre smerodajnú odchýlku máme

$$\sigma \in \left\langle 0;\ \sqrt{\frac{19 \cdot 11,4184}{10,117}}\right\rangle \approx \langle 0;\ 4,6307\rangle.$$

Testovanie štatistických hypotéz

Štatistická hypotéza je istá domnienka o vlastnostiach rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X alebo viacerých náhodných premenných. **Testovanie štatistickej hypotézy** (môžeme povedať aj overovanie pravdivosti domnienky) je postup, pri ktorom na základe náhodného výberu zo základného súboru rozhodneme, či na zvolenej hladine významnosti α (t. j. so spoľahlivosťou $1-\alpha$) danú hypotézu zamietame (neprijmeme) alebo nezamietame (prijmeme). V prípade zamietnutia prijmene **alternatívnu** („opačnú“) hypotézu.

Príklad

Chceme zistiť, či v podniku priemerný denný odpad μ *istého kovu nepresiahne 26 jednotiek hmotnosti. Potom by sme testovali hypotézu* $\mu \leq 26$*, pričom alternatívna hypotéza by mala tvar* $\mu > 26$*. Na zjednodušenie testovacieho postupu môžeme hypotézu* $\mu \leq 26$ *zapísať v tvare rovnosti* $\mu = 26$*. Týmto krokom nestratíme na všeobecnosti úvah, lebo predpokladáme krajnú prípustnú hranicu odpadu. Teda na základe zistených odpadov počas istého počtu dní (náhodný výber) by sme testovali hypotézu* $\mathcal{H}_0\colon\ \mu = 26$ *oproti alternatívnej hypotéze* $\mathcal{H}_1\colon\ \mu > 26$*. Takému testovaniu budeme hovoriť* **test zhody parametra so známou konštantou** *(parameter je* μ *a konštanta je 26).*

Základné pojmy testovania štatistických hypotéz

1. **Nulová hypotéza** $\mathcal{H}_0$ je hypotéza (domnienka), ktorej platnosť overujeme. Je napr. tvaru $\mathcal{H}_0\colon\ Q = Q_0$, kde Q je parameter základného súboru a Q_0 je konkrétna konštanta. Môžeme ju zapísať aj v tvare $\mathcal{H}_0\colon\ Q - Q_0 = 0$ (porovnávanie s nulou), a preto je štandardne používaný názov nulová hypotéza.
2. **Alternatívna hypotéza** $\mathcal{H}_1$ je hypotéza (domnienka), ktorú prijímame v prípade neprijatia nulovej hypotézy. Jej tvar závisí od samotnej formulácie testovania. Uvedieme tieto tri základné tvary:
   a) **pravostranná** alternatívna hypotéza : $\mathcal{H}_1\colon\ Q > Q_0$;
   b) **ľavostranná** alternatívna hypotéza : $\mathcal{H}_1\colon\ Q < Q_0$;
   c) **obojstranná** alternatívna hypotéza : $\mathcal{H}_1\colon\ Q \neq Q_0$.
3. **Testovacia charakteristika** G je istá konkrétna funkcia, ktorá závisí od náhodného výberu. Pre každú dvojicu $\mathcal{H}_0$ a $\mathcal{H}_1$ má špeciálny tvar a rozdelenie pravdepodobnosti.
4. **Kritická oblasť** K_α alebo **oblasť zamietnutia** je množina, ktorá je určená kvantilom testovacej charakteristiky G.
5. Hypotézu $\mathcal{H}_0$ zamietame na hladine významnosti α práve vtedy, keď hodnota testovacej charakteristiky $G \in K_\alpha$.

Etapy testovania štatistických hypotéz

1. Formulujeme predpoklady o náhodných premenných, ktorých sa testovanie týka.
2. Zvolíme hladinu významnosti α, resp. koeficient spoľahlivosti $\gamma = 1 - \alpha$.
3. Formulujeme nulovú hypotézu $\mathcal{H}_0$ a alternatívnu hypotézu $\mathcal{H}_1$.
4. Zo získaného náhodného výberu vyčíslime hodnotu príslušnej testovacej charakteristiky $G = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
5. Na základe zodpovedajúceho kvantilu určíme kritickú oblasť K_α.
6. Urobíme záver testovania, ktorý spočíva
   – buď v zamietnutí $\mathcal{H}_0$ (a teda prijatí $\mathcal{H}_1$)
   – alebo v prijatí (nezamietnutí) $\mathcal{H}_0$.

Predpokladáme, že náhodná premenná má normálne rozdelenie pravdepodobnosti, t. j. $X \sim norm(\mu, \sigma)$ a budeme skúmať zhodu parametra μ alebo σ, resp. σ^2, so známou konštantou. K tomu budeme potrebovať jeden náhodný výber rozsahu n s nameranými hodnotami x_1, x_2, ..., x_n (preto týmto testom hovoríme **jednovýberové testy**) a z neho vypočítané výberové charakteristiky $\overline{x}$, s^* atď.

Y-test zhody strednej hodnoty so známou konštantou μ_0 (σ poznáme)

Nulová hypotéza: $\mathcal{H}_0: \ \mu = \mu_0$.

Testovacia charakteristika: $Y = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$.

Kritická oblasť K_α pre alternatívnu hypotézu

a) $\mathcal{H}_1: \ \mu > \mu_0$ je $K_\alpha = (y_{1-\alpha} \,;\, \infty)$

b) $\mathcal{H}_1: \ \mu < \mu_0$ je $K_\alpha = (-\infty \,;\, -y_{1-\alpha})$

c) $\mathcal{H}_1: \ \mu \neq \mu_0$ je $K_\alpha = (-\infty \,;\, -y_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (y_{1-\frac{\alpha}{2}} \,;\, \infty)$

kde y_β je β- kvantil normovaného normálneho rozdelenia pravdepodobnosti.

Príklad

Pri tradičnom spôsobe opracovania súčiastok sa dosahovali priemerné hodnoty 4,4 istej kvalitatívnej vlastnosti so smerodajnou odchýlkou $\sigma = 0,4$. *Pokusne sa zavádza nová metóda opracovania súčiastok, ktorou opracovali 20 súčiastok a dosiahli sa takéto výsledky:*

$$4,5; \quad 4,3; \quad 4,1; \quad 4,9; \quad 4,6; \quad 3,6; \quad 4,7; \quad 5,1; \quad 4,8 \quad 4,0;$$

$$3,7; \quad 4,4; \quad 4,9; \quad 4,9; \quad 5,2; \quad 5,1; \quad 4,7; \quad 4,9; \quad 4,6; \quad 4,8.$$

Na hladine významnosti 0,05 testujte hypotézu $\mathcal{H}_0\colon\ \mu = 4{,}4$ *oproti* $\mathcal{H}_1\colon\ \mu > 4{,}4$ *za predpokladu normálneho rozdelenia pravdepodobnosti hodnôt sledovanej vlastnosti.*

Riešenie. Máme dané $n = 20,\ \sigma = 0,4$. Vypočítame $\overline{x} = 4,59$. Túto hodnotu dosadíme do testovacej charakteristiky. Dostávame

$$Y = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{4,59 - 4,4}{0,4} \cdot \sqrt{20} = 2,1243$$

Pre určenie kritickej oblasti potrebujeme hodnotu kvantilu normálneho rozdelenia $y_{1-\alpha} = y_{0,95} = 1,6449$. Kritická oblasť je $K_\alpha = (1,6449, \infty)$. Keďže $Y \in K_\alpha$, zamietame $\mathcal{H}_0$ a prijímame $\mathcal{H}_1$.

t-test zhody strednej hodnoty so známou konštantou μ_0 (σ nepoznáme)

Nulová hypotéza: $\mathcal{H}_0 : \ \mu = \mu_0$.
Testovacia charakteristika:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s^*} \cdot \sqrt{n}\,. \tag{55}$$

Kritická oblasť K_α pre alternatívnu hypotézu
a) $\mathcal{H}_1 : \ \mu > \mu_0$ je $K_\alpha = (t_{1-\alpha,\,n-1}\,;\,\infty)$
b) $\mathcal{H}_1 : \ \mu < \mu_0$ je $K_\alpha = (-\infty\,;\,-t_{1-\alpha,\,n-1})$
c) $\mathcal{H}_1 : \ \mu \neq \mu_0$ je $K_\alpha = (-\infty\,;\,-t_{1-\frac{\alpha}{2},\,n-1}) \cup (t_{1-\frac{\alpha}{2},\,n-1}\,;\,\infty)$
kde $t_{\beta,\,n-1}$ je β kvantil Studentovho t-rozdelenia pravdepodobnosti s $n-1$ stupňami voľnosti.

Príklad

Pri kontrole v pivárni kontrolór nameral nasledujúce hodnoty objemu načapovaných Zlatých Bažantov (v litroch):

0,49; 0,5; 0,48; 0,47; 0,505; 0,485; 0,49; 0,495; 0,5; 0,48.

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ *otestujte hypotézu* $\mathcal{H}_0 : \mu = 0{,}5$ *oproti hypotéze* $\mathcal{H}_1 : \mu < 0{,}5$*. Môžeme na tejto hladine významnosti tvrdiť, že sa pivo nedolieva?*

Riešenie. Testujeme hypotézu $\mathcal{H}_0$ oproti alternatívnej hypotéze $\mathcal{H}_1 : \mu < 0,5$ na hladine významnosti $\alpha = 0,05$.

Vypočítame $\overline{x}$ a s^*. Dostávame $\overline{x} = 0,4895$, ${s^*}^2 = 1,1917 \cdot 10^{-4}$, $s^* = 0,0109$. Tieto hodnoty dosadíme do testovacej charakteristiky. Dostávame

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{0,4895 - 0,5}{0,0109} \cdot \sqrt{10} = -3,0417$$

Kritická oblasť pre $\mathcal{H}_1 : \mu < 0,5$ je $K_\alpha = (-\infty, -t_{1-\alpha,n-1})$. V tabuľkách nájdeme hodnotu kvantilu t-rozdelenia $t_{1-\alpha,n-1} = t_{0{,}95;9} = 1,8331$. Platí, že $-3,0417 \in (-\infty, -1,8331)$. Keďže $t \in K_\alpha$, zamietame $\mathcal{H}_0$ a prijímame $\mathcal{H}_1$. Teda na hladine významnosti $0,05$ môžeme tvrdiť, že pivo sa nedolieva.

χ^2-test zhody rozptylu σ^2 so známou konštantou σ_0^2

Nulová hypotéza: $\mathcal{H}_0: \ \sigma^2 = \sigma_0^2$.
Testovacia charakteristika:

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma_0^2} \cdot s^{*2}. \tag{56}$$

Kritická oblasť K_α pre alternatívnu hypotézu
a) $\mathcal{H}_1: \ \sigma^2 > \sigma_0^2$ je $K_\alpha = (\chi^2_{1-\alpha,\, n-1}\,;\, \infty)$
b) $\mathcal{H}_1: \ \sigma^2 < \sigma_0^2$ je $K_\alpha = (0;\, \chi^2_{\alpha,\, n-1})$,
c) $\mathcal{H}_1: \ \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ je $K_\alpha = (0;\, \chi^2_{\frac{\alpha}{2},\, n-1}) \cup (\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1}\,;\, \infty)$
kde $\chi^2_{\beta,\, n-1}$ je β kvantil χ^2 rozdelenia pravdepodobnosti s $n-1$ stupňami voľnosti.

Príklad

Náhodným výberom v dvanástich predajniach sa preverovali počty tovarov predávaných po záruke. Výsledky boli nasledovné:

$$15,\ 21,\ 17,\ 15,\ 17,\ 15,\ 21,\ 17,\ 18,\ 21,\ 18,\ 18.$$

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ *otestujte hypotézu* $\mathcal{H}_0 : \sigma^2 = 6$ *proti* $\mathcal{H}_1 : \sigma^2 < 6$.

Máme $n = 12$, $\sigma_0^2 = 6$. Vypočítame $\overline{x}$ a ${s^*}^2$. Dostávame $\overline{x} = 17,75$, ${s^*}^2 = 5,113636$. Tieto hodnoty dosadíme do testovacej charakteristiky. Dostávame

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma_0^2} \cdot {s^*}^2 = \frac{11}{6} \cdot 5,113636 = 9,375$$

Pre určenie kritickej oblasti potrebujeme hodnotu kvantilu χ^2 rozdelenia: $\chi^2_{\alpha,n-1} = \chi^2_{0,05;11} = 4,57481$. Kritická oblasť je

$$K_\alpha = (0; 4,57481).$$

Keďže $\chi^2 \notin K_\alpha$, prijímame $\mathcal{H}_0$.