Matematika 2 – 8.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Určitý integrál

3.1 Newton – Leibnizov vzorec

Nech funkcia *f* je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a nech má na tomto intervale primitívnu funkciu $F(x)$. Potom platí

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{určitý integrál}} = [F(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \text{čislo}$$

dané hranice integrovania

a dolná hranica

b horná hranica

Pr. 1: Vypočítajte určitý integrál

$$\int_1^3 \left(x^2+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$$

Pr. 2: Vypočítajte určitý integrál

$$\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt{x}\right]_0^1 = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$$

Pr. 3 – 58 / 9: Vypočítajte určitý integrál

$$\int_0^2 \frac{2x-3}{x-3}\,dx$$

Pr. 4 – 58 / 9: Vypočítajte určitý integrál

$$\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}\,dx$$

$$\int_3^7 \left(\frac{x}{x^2-4}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_3^7 \left(\frac{2x}{x^2-4}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2-4|\right]_3^7 = \left[\frac{1}{2}\ln|7^2-4| - \frac{1}{2}\ln|3^2-4|\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 45 - \frac{1}{2}\ln 5 = \frac{1}{2}\ln\frac{45}{5} = \frac{1}{2}\ln 9 = \ln 9^{\frac{1}{2}} = \ln 3$$

Určitý integrál

3.2 Substitučná metóda

Nech funkcia *f* je spojitá na intervale $\mathrm{I} \in \langle a, b\rangle$ a nech funkcia má spojitú deriváciu na ohraničenom intervale $\mathrm{J} \in \langle c, d\rangle$ a zobrazuje interval I do J. Potom platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_c^d f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_c^d = \mathrm{F}(d) - \mathrm{F}(c)$$

$$\left|\begin{matrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ a \to c = \varphi(a) \\ b \to d = \varphi(b) \end{matrix}\right|$$

c, d nové hranice po substitúcii pre t

a, b pôvodné hranice pre x

Pr. 5 – 58 / 17: Vypočítajte určitý integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - \cos x)^4 \sin x \, dx$$

Pr. 6 – 58 / 14: Vypočítajte určitý integrál

$$\int_0^1 2x(x^2+2)^3\,dx$$

$$\int_0^1 2x\,(x^2+2)^3\,\mathrm{d}x \quad = \int_2^3 t^3\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{4}\right]_2^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = \frac{65}{4}$$

$$\left| \begin{array}{l} x^2+2=t \\ 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \to 1+2=3 \\ 0 \to 0+2=2 \end{array}$$

Pr. 7 – 58 / 20: Vypočítajte určitý integrál

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$$

Určitý integrál

3.3 Metóda per partes

Nech funkcie *u*,*v* sú spojito diferencovateľné na intervale $\mathrm{I} \in \langle a, b\rangle$. Potom platí

$$\int_a^b u(x).v'(x)\mathrm{d}x = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{dx}$$

Pr. 8 – 60 / 36: Vypočítajte určitý integrál

$$\int_0^2 xe^{-x}\,dx$$

Pr. 9: Vypočítajte určitý integrál

$$\int_1^2 (2x+1)e^x$$

$$\begin{vmatrix} u = 2x+1 & v' = e^x \\ u' = 2 & v = e^x \end{vmatrix}$$

$$[(2x+1)e^x]_1^2 - \int_1^2 2e^x \, \mathrm{d}x = [(2x+1)e^x]_1^2 - [2e^x]_1^2 =$$

$$= (4+1)e^2 - (2+1)e^1 - 2e^2 + 2e^1 = 3e^2 - e^1$$

Pr. 10 – 60 / 34: Vypočítajte určitý integrál

$$\int_{2}^{e} x \ln x \, dx$$

Dú: str. 58 / 3, 15, 16, 19, 32, 33