Matematika 2 – 10.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pr. 5: Vypočítajte
a) obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami,
b) objem telesa, ktoré vznikne rotáciou danej elementárnej oblasti okolo osi *x.*

$$y = 3, y = x, x = 0$$

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))\mathrm{d}x$$

$$V = \pi \int_0^3 (3^2 - x^2)\mathrm{d}x = \pi \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \pi\left(9.3 - \frac{3^3}{3}\right) - 0 = \pi(27 - 9) = \boldsymbol{18\pi}$$

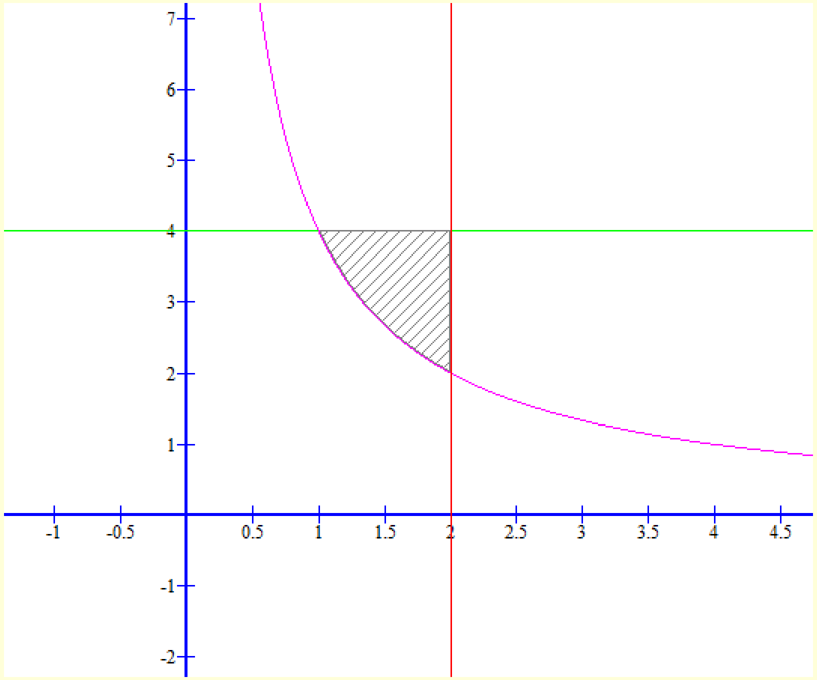
Kontrolka: Doplňte chýbajúce hranice pre danú elementárnu oblasť:

a) typu [x, y]

$$? \le \boldsymbol{x} \le 2$$
$$\frac{4}{x} \le \boldsymbol{y} \le ?$$

b) typu [y, x]

$$2 \le \boldsymbol{y} \le ?$$
$$? \le \boldsymbol{x} \le 2$$



DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIE VIAC PREMENNÝCH

Parciálne derivácie funkcie dvoch premenných

Pravidlá pre výpočet derivácie funkcie**:**

$$[cf(x)]' = cf'(x) \qquad c \in \mathrm{R}$$
$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$$
$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$
$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x).$$

Derivácie elementárnych funkcií:

- $[c]' = 0$
- $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1},\ \alpha \in R$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\operatorname{tg} x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(x^1)' = 1$

- $[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\operatorname{arctg} x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $[e^x]' = e^x$
- $[a^x]' = a^x \ln a$
- $[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$
- $[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Pr. 1 – 82 /1: určte parciálne derivácie prvého rádu funkcie $z = 2x^2 + 4y^3 - 15x^2y + xy^3$

derivácia funkcie z podľa x, teraz y je konštanta

$z = 2x^2 + 4y^3 - 15x^2y + xy^3$

výraz $\mathbf{2x^2}$ *derivujeme ako* $(cf(x))' = c\,f'(x)$, $\mathbf{x^2}$ *derivujeme pomocou* $(x^n)' = nx^{n-1}$

výraz $\mathbf{4y^3} = \mathbf{c}$ *derivujeme ako konštantu* $c' = 0$

výraz $\mathbf{15x^2y}$ *derivujeme ako* $(cf(x))' = c\,f'(x)$, kde $\mathbf{15y = c}$, *ktorú opisujeme*

výraz xy^3 *derivujeme ako* $(cf(x))' = c\,f'(x)$, kde y^3 $\mathbf{= c}$, *ktorú opisujeme*, $\mathbf{x}$ *derivujeme ako* $(x^1)' = 1x^0 = 1$

$z'_x = 2.2x + 0 - 15.2.x.y + 1.y^3 = 4x - 30xy + y^3$

derivácia funkcie z podľa y, teraz x je konštanta

$z = 2x^2 + 4y^3 - 15x^2y + xy^3$

$z'_x = 0 + 4.3y^2 - 15.x^2.1 + x.3y^2 = 12y^2 - 15x^2 + x.3y^2$

Pr. 2 – 82 / 7: určte parciálne derivácie prvého rádu funkcie

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Pr. 3 – 83 / 10: určte parciálne derivácie prvého rádu funkcie

$$z = \frac{\ln x}{x - y} + \frac{2}{x^2 + y^2}$$

Pr. 4 – 82 / 5: určte parciálne derivácie prvého rádu funkcie

$$z = (2x + 5y)\sin 3x$$

$$z'_x = 2\sin 3x + (2x + 5y).3.\cos 3x$$

$$z'_y = 5\sin 3x$$

Pr. 5 – 84 / 21: určte parciálne derivácie prvého rádu funkcie

$$z = \ln(xy - 4) + \frac{y}{x+2}$$

$$z'_x = \frac{1}{xy-4}y + \frac{-y}{(x+2)^2}$$

$$z'_y = \frac{1}{xy-4}x + \frac{1}{x+2}$$

Pr. 6 – 83 / 11: určte parciálne derivácie prvého rádu funkcie

$$z = \frac{3 - y}{x^2 - y^2} + e^{2x+3y}$$

Dotyková rovina ku grafu funkcie dvoch premenných

$$\rho:\; z - z_0 = z'_x(A)(x - x_0) + z'_y(A)(y - y_0)$$

Pr. 7 – 86 / 34: Určte rovnicu dotykovej roviny k grafu funkcie v bode A

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad A = [3, 4, ?]$$

1. **Dopočítame súradnicu z_0 pre bod A dosadením súradníc x_0, y_0 do predpisu funkcie $z = f(x,y)$.**

2. **Vypočítame parciálne derivácie funkcie $z = f(x,y)$ podľa x a y.**

3. **Určíme $z'_x(A), z'_y(A)$.**

4. **Napísať rovnicu dotykovej roviny k grafu funkcie v bode A a upraviť.**

Pr. 8 – 86 / 31: Určte rovnicu dotykovej roviny k grafu funkcie v bode A

$$z = 2x^2 - 4y^2, \quad A = [2, 1, ?]$$

1. **Dopočítame súradnicu z_0 pre bod A dosadením súradníc x_0, y_0 do predpisu funkcie $z = f(x,y)$.**

$$z_0 = 2x_0^2 - 4y_0^2 = 2, 2^2 - 4.1^2 = 8 - 4 = 4$$

2. **Vypočítame parciálne derivácie funkcie $z = f(x,y)$ podľa x a y.**

$$z'_x = 4x, \; z'_y = -8y$$

3. **Určíme $z'_x(A)$, $z'_y(A)$.** $\quad z'_x(A) = 4.2 = 8, \; z'_y(A) = -8.1 = -8$

4. **Napísať rovnicu dotykovej roviny k grafu funkcie v bode A a upraviť.**

$$\rho: \; z - z_0 = z'_x(A)(x - x_0) + z'_y(A)(y - y_0)$$

$$z - 4 = 8(x - 2) - 8(y - 1)$$

$$0 = 8x - 16 - 8y + 8 - z + 4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\rho}: \; \mathbf{0 = 8x - 8y - z - 4}$$

Dú: str. 82 / 1 - 30
str. 85 /32, 33, 35, 36