

OPERÁCIE S M.R.

nech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots = f(x) \quad \text{na } (a-\delta, a+\delta)$$

operácie $\int \left(\int \right)$

M.R. možeme derivovať (integrovať) člen po člene. Prečo?
 namiesto M.R. majú rovnú štruktúru konvergencie

APLIKÁCIA

Geom. rad

$$\begin{aligned} (1) \quad & 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \delta=1 \quad (-1,1) \\ & 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1,1) \\ & 2 + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + \dots = \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right)' = \frac{2}{(1-x)^3} \quad (-1,1) \end{aligned}$$

$$q = -x^2$$

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \frac{1}{1+x^2} \quad \delta=1$$

$$\int dx \quad x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \arctg x + C \quad x=0$$

↓ UVEDLI EL. FCIU AKO SČLČEN M.R.

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \arctg x \, dx &= \int_0^{1/2} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{30} - \dots \right]_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 2^2} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 2^4} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 2^6} - \dots \end{aligned}$$

chyba

Pre danú el. fciu $f(x)$ ($f(x)=e^x$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$)
 VPOUŽIJEME PRI FK P $\sin(x \pm z_i) = ?$

keď máme M.R., z ktorého súčtom je $f(x)$

Mojma

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots = f(x) \quad \text{na } (a-\delta, a+\delta)$$

Kedy $x=a$

$$a_0 = f(a) = \frac{f^{(0)}(a)}{0!}$$

deriv.

$$a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots = f'(x)$$

$x=a$

$$a_1 = \frac{f'(a)}{1!}$$

$x=a$

$$2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-a) + \dots = f''(x)$$

$x=a$

$$a_2 = \frac{f''(a)}{2!} \quad a_3 = \frac{f'''(a)}{3!} \quad \dots \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Veda: nech na $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$ platí:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = f(x)$$

Podoz.

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Navrhni na R. podmienku M.R.
 z danú el. fciu $f(x)$

VSTOP

ZOSTR.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n &= f(x) \end{aligned}$$

MOŽE SA STAŤ
 ŽE VYTVORENÍ M.R.
 NEKONVERGUJE K
 PŮVOD. FCIE

(Pre el. fciu vyhovujúcu
 M.R. má rovnú súčtu pôr. el. fciu)

TAYLOR or RAD

Napíšme TAYL. RAD pre $f(x)=e^x$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad a_0 = f(0) = 1 \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = e^0 = 1$$

(hľadáme $a=0$)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{me či x platí?} \quad (-\infty, \infty)$$

Poviem

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \right) dx \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2} - \frac{1}{7 \cdot 3!} \end{aligned}$$

chyba

$$f(x) = \sin x$$

2. TR?

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \end{aligned}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

SPÔKLENIE PRI FK P