Riešte $y''(x) + y(x) = 2x+1$

1. $y'' + y = 0 \xrightarrow{\text{MÁME}} y_1 = \sin x\,,\ y_2 = \cos x$ LN

2. $\varphi(x)$ rieš našej DR $\quad \varphi(x) = 2x+1\,,\ \varphi' = 2\,,\ \varphi'' = 0$

hľadá

$$\boxed{y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + 2x+1}$$

1. AKO NÁJSŤ 2 LN rieš (1)

nevieme vo všeobecnosti!

Zoberieme jednoduchý prípad $\quad p(x) = p\,,\ q(x) = q$

$(\bar{1})$ $\quad y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = 0\,, \qquad p, q \in R$

??? UHÁDNEME

z tvaru (1) $\quad y, y', y''$ sa nemôžu veľmi odlišovať

$$y \sim y' \sim y''$$

napr. $y = \ln x$, $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$

KTORÁ FCIA SA DERIVÁCIOU MÁLO ZMENÍ

$y = e^x$ vôbec

$y = e^{\lambda x}$ TIP $\qquad \lambda \in R$

KEDY $e^{\lambda x}$ je rieš $(\bar{1})$ overíme dosadením

$y = e^{\lambda x}\,,\quad y' = \lambda e^{\lambda x}\,,\quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$$0 \stackrel{?}{=} \lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0}\big(\underbrace{\lambda^2 + p\lambda + q}_{=0}\big) = 0$$

Zistili sme, že $e^{\lambda x}$ je rieš $(\bar{1})$ vtedy a len vtedy ak λ je koreň CHarakteristickej rovnice

(CHR) $\qquad \lambda^2 + p\lambda + q = 0$

$[\, y'' + py' + qy = 0 \,]$ $\qquad y^{(i)} \sim \lambda^i$

Riešte DR

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

CHR $\quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \qquad \lambda_1 = 2 \ \ldots\ e^{2x}$

$(\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \qquad \lambda_2 = 3 \ \ldots\ e^{3x}$

vš. rieš $\quad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

(CH R) $\qquad \lambda^2 + p\lambda + q = 0$

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reál — vybavené
2. $\lambda_1 = \lambda_2$ reál
3. $\lambda_1 = a + ib$ kompl. koreň $\quad (\lambda_2 = a - ib)$ nepotrebujeme

Prípad dvojnásobného koreňa $(\lambda_1 = \lambda_2)$

Mám jedno $\quad y_1 = e^{\lambda_1 x}$

$y_2 = x e^{\lambda_1 x}$ $\quad$ (pridám x)

$y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x}$ $\quad$ v prípade DR n-tého rádu

$y_4 = x^3 e^{\lambda x}$

$\vdots$

Riešte DR

$$y'' - 2y' + y = 0$$

CH.R. $\quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 1$ dvoj.

$(\lambda - 1)^2$ $\qquad y_1 = e^x$

$y_2 = x e^x$

vš. rieš $\quad y = c_1 e^x + c_2 x e^x$

Prípad $\lambda_1 = a + ib \quad (b \neq 0)$

Mám rieš $\quad y = e^{\lambda_1 x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} \stackrel{\text{EUL}}{=}$ $\quad$ K.Č. $\longrightarrow$ ODVODÍME FKP

rieš v kompl. tvare

$= e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$

$= \underbrace{e^{ax}\cos bx}_{y_1} + i\,\underbrace{e^{ax}\sin bx}_{y_2}$ $\quad$ LN.

Riešte DR

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

CH R: $\quad \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i \qquad \lambda_1 = \overset{a}{-1} + i \cdot \overset{b}{1}$$

$y_1 = e^{-x}\cos x\,,\quad y_2 = e^{-x}\sin x$ $\qquad$ D.Ú. (overte LN)

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$