DIFERENCIÁLNE ROVNICE

sú rovnice obsahujúce deriváciu (cie) neznámej fcie

Pr. DR 1. rádu $y'(x) = x\,y(x)$ DR 2. rádu $y''(x) + 3y'(x) + 4y(x) = 0$ $y''(x) = 5$

Rád DR je rád najvyššej derivácie.

Riešiť DR znamená nájsť (všetky) funkcie, ktoré na istom intervale vyhovujú danej rovnici

$$(y'(x))^{10} + \sin^{15} x \, dx = 0$$ DR I. rádu

DR I. rádu, II. rádu } špec. typy

Príklad. Riešte DR

$$\boxed{y'(x) = x^2 + 1} \quad / \int$$

$$\int y'(x)\,dx = \int x^2+1 \, dx = \frac{x^3}{3} + x + C$$

$\int y'(x)\,dx = y(x)$

C int. konštanta – spôsobuje, že DR má ∞-veľa riešení

Ak keď je zadaná dodatočná podmienka, ktorá umožní vybrať jedno konkrétne riešenie

Pr. riešte $y' = x^2 + 1$ ak $\boxed{y(1) = 2}$

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + x + C \qquad 2 = \frac{1}{3} + 1 + C \qquad C = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

SEPAROVATEĽNÁ DR

je DR, ktorú viem upraviť na tvar

$$(S) \quad f(y)\,y' = g(x) \quad / \int$$ f je spoj. g je spoj

$$\underbrace{\int f(y(x))\,y'(x)\,dx}_{} = \int g(x)\,dx$$

subst $y(x) = u$ označ $G' = g$, $F' = f$

$$\int f(u)\,du = \int g(x)\,dx$$

$$F(u) = G(x) + C$$

$$(1) \quad F(y(x)) = G(x) + C$$ riešenie v impl. tvare

$$y(x) = F^{-1}(G(x) + C)$$ expl. tvar

Riešiť SDR znamená prejsť od $(S) \to (1)$

SCHÉMA NA PRAX

(S) $f(y)\,y' = g(x)$ $y' = \frac{dy}{dx}$

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

$$(1) \quad F(y) = G(x) + C$$

Riešte DR $\frac{dy}{dx} = y'(x) = x y^2$ ak $y(0) = 1$

$\boxed{\text{podmienka } y \neq 0}$ $\boxed{y \equiv 0}$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int x\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c \quad \text{IMP} \qquad 0' = x^2 0^2 \text{ OK}$$

$$\boxed{y = \frac{-1}{\frac{x^2}{2} + c}} \; ; \; \text{EXP} \quad \text{plus } \boxed{y \equiv 0}$$

$$-\frac{1}{y} + c_1 = \frac{x^2}{2} + c_2 \qquad c = c_2 - c_1$$

$$1 = -\frac{1}{c} \Rightarrow c = -1 \qquad y = \frac{-1}{\frac{x^2}{2} - 1} = \frac{2}{2 - x^2}$$

riešenie existuje

$(-\infty, -\sqrt{2})$, $\underbrace{(-\sqrt{2}, \sqrt{2})}_{\text{NÁŠ INTER}}$, $(\sqrt{2}, \infty)$

---

2. LINEÁRNA DR I. rádu je DR tvaru

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x),$$ kde $a(x), b(x)$ sú dané fcie spojité na I

Riešenie $y(x)$ existuje na celom

Ozn. I.F. = INTEGRAČNÝ FAKTOR

$e^{\int a(x)dx} \to$ tu si vyberám 1 PF spravidla $c = 0$

$$\underbrace{y'(x)\,e^{\int a(x)dx} + a(x)\,e^{\int a(x)dx}\,y}_{} = b(x)\,e^{\int a(x)dx}$$

$$\left(e^{\int a(x)dx}\,y(x)\right)' = b(x)\,e^{\int a(x)dx}$$

ĎALŠÍM INT. ZRUŠÍME

$$e^{\int a(x)dx}\,y(x) = \int \left(b(x)\,e^{\int a(x)dx} + c\right)dx$$

odtiaľ už y viem vyjadriť

Riešte DR:

$$y'(x) - \underbrace{\frac{1}{x}}_{a(x)}\,y(x) = \underbrace{2x}_{b(x)}, \quad / \cdot \frac{1}{x} \quad \text{ak } y(1) = 1$$

$\to (-\infty, 0)$, $(0, \infty)$

IF $$e^{\int a(x)dx} = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$\underbrace{\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y}_{} = 2$$

$$\left(\frac{1}{x}y\right)' = 2 \quad / \int$$

$$\frac{1}{x}y = 2x + C$$

$$y = 2x^2 + Cx$$ – všeob. rieš. $(0, \infty)$

pre $x = 1$ $1 = 2 + C \Rightarrow C = -1$

$$\boxed{y(x) = 2x^2 - x}$$

$$y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = f(x)$$ TOTO NABUDÚCE