ČÍSELNÉ RADY

Hodnotí čísla: pojem posloupnosti $\forall n \in N \xrightarrow{\text{priradí}} a_n \in R$

Pravidlo tvoru: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1; a_2; a_3; \dots a_n; \dots$

Ale z posloupnosti vytvoříme rad?

Jak, že seznam $\forall$ členy posloupnosti a spočítám ich.

DEF: Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnosť čísel. Výraz $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ nazývame číselný rad. Označujeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jednotlivé čísla a_n nazývame členy radu.

Otázka: Má každý číselný rad súčet? Ak áno, čo je výsledkom?

V prípade, že sa jedná o konečný rad, problém nie je

$\sum_{n=1}^{3} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

Ak je rad nekonečný, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ jeho súčet určiť

Tento nevieme.

Intuitívne je zrejmé, že súčet nekonečného radu nájdeme postupným pričítaním následujúcich členov (sčítanec) k už existujúcemu súčtu, predchádzajúcich členov.

Takto dostaneme postupnosť súčtov, ktoré sa k hľadanému súčtu radu blíži (konverguje). Hľadaný súčet určíme ako limitu tejto postupnosti pre $n \to \infty$.

DEF: Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselný rad. Postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvorí

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$\vdots$

sa nazýva postupnosť čiastočných súčtov.

1) Ak existuje konečná (vlastná) limita $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame konvergentný rad a píšeme

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. ($S$ je súčet radu)

2) Ak neexistuje vlastná limita $\lim_{n\to\infty} S_n$, potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame divergentný. (rad nemá súčet)

POZNÁMKA: Znak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa používa súčasne pre označenie číselného radu, ale súčasne aj pre jeho súčet, ak existuje.

POZNÁMKA: Ak sú členy radu kladné ($a_n > 0$), tak

$S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{>0} \geq S_n$. Z toho je jasné, že postupnosť čiastočných súčtov je rastúca

- ak je zhora ohraničená $\Rightarrow$ rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje
- ak je zhora neohraničená $\Rightarrow$ rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \Rightarrow$ rad diverguje

POZNÁMKA: Súčet číel. radu vieme nájsť len v špeciálnych prípadoch.

Známym prípadom nekonečného radu je geometrický rad

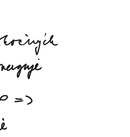
$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \underset{a_1}{a} + \underset{a_2}{a \cdot q} + a \cdot q^2 + \dots$ $(a \neq 0)$, kde $\underline{a}$ je prvý člen radu

a $\underline{q}$ je kvocient radu.

Z vzťahu vidíme, že súčet konečného počtu členov geom. radu $(q \neq 1)$ je $S_n = \underset{a_1}{a} \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ (ak $q = 1 \Rightarrow S_n = n \cdot a$)

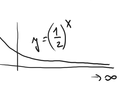
Na základe definície súčtu nekonečného radu platí:

$S = \lim_{n\to\infty} S_n$



a) $q \geq 1$, tak $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$

b) ak $-1 < q < 1$ ($|q| < 1$), tak $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\overset{a_1}{a}}{1-q}$



c) $q \leq -1$, tak $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ neexistuje

PRÍKLAD 1: Nájdime súčet radu $\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = a_n$

Môžem predpokladať, že by to mohol byť geometrický rad. Potrebujem to zistiť: $\sum_{n=0}^{\infty} 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\cancel{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{\cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^n} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1}{\cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^n}} = \frac{1}{3}$$

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{2}{3}} = 3$$

$a_1 = 2$

PRÍKLAD 2: Nájdime súčet radu $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$

Overím, či je to geom. rad

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{(n+1)+1}}{3^{(n+1)-1}}}{(-1)^n \cdot \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{n+2}}{3^n}}{(-1)^n \cdot \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{n+2} \cdot 3^{n-1}}{3^n \cdot (-1)^n \cdot 2^{n+1}} =$$

$$= \frac{\cancel{(-1)^n} \cdot (-1) \cdot \cancel{2^n} \cdot 2^2 \cdot \cancel{3^n} \cdot 3^{-1}}{\cancel{3^n} \cdot \cancel{(-1)^n} \cdot \cancel{2^n} \cdot 2} = \frac{(-1) \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \frac{1}{3}}{\cancel{2}} = -\frac{2}{3} = q$$

$|q| = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$ ☺ môžem použiť vzorec

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{8}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{8}{5}$$

$a_1 = (-1)^2 \cdot \frac{2^{2+1}}{3^{2-1}} = \frac{2^3}{3^1} = \frac{8}{3}$

PRÍKLAD 3: Nájdime súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (nie je to geom. rad)

a_n

$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

? $\lim_{n\to\infty} S_n$?

→ iracionálny výraz

$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

n-tý čiastočný súčet zapíšeme do stĺpca $\Rightarrow$ (VÝHODA)

$$\begin{aligned} S_n = &\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \\ &\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \\ &\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \\ &\vdots \\ &\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \\ &\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \overset{0}{\frac{1}{n+1}}\right) = 1$