

TEÓRIA HROMADNEJ OBSLUHY

Základný kurz

Štefan Berežný

Technická univerzita v Košiciach, Slovenská Republika
Faculta elektrotechniky a informatiky

Zimný semester – 2021/2022

THO

Štefan Berežný

Exponenciálny
model
jednoduchej
obsluhy

Predpoklady

Označenia

Vlastnosti

Základné
charakteristiky
systému

Zhrnutie

- 1 Exponenciálny model jednoduchkej obsluhy
- 2 Predpoklady
- 3 Označenia
- 4 Vlastnosti
- 5 Základné charakteristiky systému
- 6 Zhrnutie

Modely hromadnej obsluhy

Exponenciálny model jednoduchkej obsluhy

Exponenciálny model jednoduchkej obsluhy je najjednoduchším procesom hromadnej obsluhy. Podľa Kendallovej klasifikácie modelov hromadnej obsluhy ide o model:

$$M/M/1.$$

Tento najjednoduchší systém hromadnej obsluhy má exponenciálne rozdelenie intervalov medzi príchodmi požiadaviek a dôb obsluhy s jedným obslužným zariadením.

Modely hromadnej obsluhy

Exponenciálny model jednoduchkej obsluhy

Najprv popíšeme, aké predpoklady musí daný model spĺňať.

Predpoklady modelu:

- (1) rozdelenie početnosti navzájom nezávislých náhodných veličín (dôb obsluhy a dôb medzi príchodmi) má charakter exponenciálneho rozdelenia,
- (2) je to otvorený systém hromadnej obsluhy,
- (3) systém s jedným obslužným zariadením,
- (4) režim radu je jednoduchý (riadi sa FIFO) a v prípade nedostatočnej kapacity obslužného zariadenia budú požiadavky trpezlivo čakať v rade na obsluhu (neodchádzajú z radu).

Modely hromadnej obsluhy

Exponenciálny model jednoduchej obsluhy

Intenzita príchodov symbolom λ (lambda) označíme priemerný počet požiadaviek, ktoré vstupujú do systému za určitý časový interval.

Intenzita obsluhy symbolom μ (mí) označíme priemerný počet požiadaviek obslúžených za časový interval.

Modely hromadnej obsluhy

Exponenciálny model jednoduchkej obsluhy

Za predpokladu, že počet vstupujúcich požiadaviek do systému sa riadi Poissonovým rozdelením, je možné pravdepodobnosť vstupu n jednotiek v časovom intervale $T = (0, t)$ vyjadriť v tvare:

$$P_n(T) = \frac{(\lambda T)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda T}. \quad (1)$$

Podobne, ak rozdelenie dôb medzi púríchodmi t zodpovedá exponenciálnemu rozdeleniu, potom hustota rozdelenia má tvar:

$$q(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}. \quad (2)$$

Modely hromadnej obsluhy

Exponenciálny model jednoduchkej obsluhy

Pri konštrukcii modelu hromadnej obsluhy je nutné vždy testovať, či zistené empirické rozdelenia dôb medzi príchodmi, prípadne dôb trvania obsluhy vyhovujú predpokladu exponenciálneho rozdelenia, prípadne Poissonovho rozdelenia pre počet vstupujúcich a obslužených požiadaviek. Môžeme použiť pre toto testovanie napr. χ^2 test.

Modely hromadnej obsluhy

Exponenciálny model jednoduchkej obsluhy

- Predpokladáme, že stav systému v ľubovoľnom časovom okamžiku t je jednoznačne určený číslom n , ktoré udáva počet jednotiek v systéme.
- Počet jednotiek v systéme n nezávisí na žiadnom z predchádzajúcich stavov, okrem stavu, ktorý mu bezprostredne predchádza. Ide o proces hromadnej obsluhy, ktorý má charakter Markovovského procesu.

Modely hromadnej obsluhy

Exponenciálny model jednoduchkej obsluhy

Označme S_n stav, keď v systéme je práve n jednotiek. Potom v intervale $(t, t + \Delta)$ sa môžu uskutočniť len tieto prechody:

- $S_0 \implies S_0$, pre počiatočný stav $n = 0$,
- $S_0 \implies S_1$, pre počiatočný stav $n = 0$,
- $S_1 \implies S_0$, pre počiatočný stav $n = 0$,
- $S_n \implies S_n$, pre $n \geq 1$,
- $S_n \implies S_{n+1}$, pre $n \geq 1$,
- $S_n \implies S_{n-1}$, pre $n \geq 1$.

Má zmysel uvažovať iba možnosť zotrvania v danom stave, alebo prechod medzi susednými stavmi.

Modely hromadnej obsluhy

Exponenciálny model jednoduchkej obsluhy

- Pravdepodobnosti prechodu, za predpokladu exponencionálneho rozdelenia, medzi nesusednými stavmi sú nekonečne malé.
- Pravdepodobnosti vstupu do systému, alebo obsluhy viac ako jednej jednotky v časovom intervale Δt sú zanedbateľné.
- Označme ako $p_n(t)$ – nepodmienenú pravdepodobnosť toho, že systém sa nachádza v časovom okamžiku t v stave S_n , t.j. $(n - 1)$ požiadaviek čaká v rade a jedna je obsluhovaná.
- $\lambda \Delta t$ – je pravdepodobnosť príchodu jednotky do systému v intervale $(t, t + \Delta t)$.
- $\mu \Delta t$ – je pravdepodobnosť ukončenia obsluhy jednotky v intervale $(t, t + \Delta t)$.

Modely hromadnej obsluhy

Exponenciálny model jednoduchej obsluhy

Po uplynutí doby Δt sa zmení $p_n(t)$ na pravdepodobnosť $p_n(t, t + \Delta t)$. Sústavu pravdepodobností prechodu medzi jednotlivými stavmi počas doby Δt nášho systému vyjadríme pomocou matice pravdepodobnosti prechodu P v tomto tvare:

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \lambda\Delta t & \lambda\Delta t & 0 & \dots & 0 \\ \mu\Delta t & 1 - \mu\Delta t - \lambda\Delta t & \lambda\Delta t & \dots & 0 \\ 0 & \mu\Delta t & 1 - \mu\Delta t - \lambda\Delta t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Modely hromadnej obsluhy

Exponenciálny model jednoduchkej obsluhy

Vektor nepodmienенých pravdepodobností $p_n(t)$ má v časovom okamžiku t súradnice:

$$\vec{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t), \dots). \quad (3)$$

Po uplynutí časového okamžiku Δt platí:

$$\vec{p}(t + \Delta t) = \vec{p}(t) \cdot P. \quad (4)$$

Prte jednotlivé súradnice dostávame:

$$\begin{aligned} p_0(t + \Delta t) &= (1 - \lambda\Delta t)p_0(t) + \mu\Delta tp_1(t), \text{ pre } n = 0, \\ p_n(t + \Delta t) &= \lambda\Delta tp_{n-1}(t) + (1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t)p_n(t) + \\ &+ \mu\Delta tp_{n+1}(t), \text{ pre } n \geq 1. \end{aligned}$$

Modely hromadnej obsluhy

Exponenciálny model jednoduchkej obsluhy

Limitným prechodom pre $\Delta t \rightarrow 0$ dostávame sústavu $(n + 1)$ lineárnych homogénnych diferenciálnych rovníc pravdepodobnosti $p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t), \dots$, ktoré sa zvyknú nazývať Erlangovou sústavou:

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \text{ pre } n = 0,$$

$$p'_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + \mu)p_n(t) + \mu p_{n+1}(t), \text{ pre } n \geq 1.$$

Z dôvodu zjednodušenia výpočtu (integrovanie sústavy je možné, ale výpočtovo obtiažne) budeme skúmať, či uvažovaný systém hromadnej obsluhy sa po dostatočne dlhej dobe svojho fungovania stabilizuje, t.j. prestane byť závislý na čase t a na počiatočných podmienkach.

Modely hromadnej obsluhy

Exponenciálny model jednoduchkej obsluhy

Podmienka stabilizácie skúmaného systému hromadnej obsluhy má tvar:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = p_n, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Predpokladáme, že aspoň jeden z výrazov p_n je rôzny od nuly.

Markovov reťazec odpovedajúci matici pravdepodobnosti prechodu P je ergodický a neperiodický. Pre všetky pravdepodobnosti $p_n(t)$ existujú limity p_n a to buď všetky kladné, alebo všetky nulové.

Modely hromadnej obsluhy

Základné charakteristiky systému $M/M/1$

Modely hromadnej obsluhy

Základné charakteristiky systému $M/M/1$

Modely hromadnej obsluhy

Základné charakteristiky systému $M/M/1$

Modely hromadnej obsluhy

Základné charakteristiky systému $M/M/1$

Modely hromadnej obsluhy

Zhrnutie

THANK YOU FOR YOUR ATTENTION.