BINÁRNE RELÁCIE

Karteziánsky súčin

Ak x a y sú prvky (nejakej množiny), potom symbol $\{x, y\}$ označuje množinu obsahujúcu práve prvky x a y a nazýva sa **neusporiadaná dvojica** prvkov x a y. Pripomeňme, že $\{x, y\}$ je to isté ako $\{y, x\}$. Zavedieme tiež označenie (x, y) pre **usporiadanú dvojicu** prvkov x a y. V tomto prípade závisí na poradí prvkov v zátvorkách. Podobne definujeme **usporiadanú n-ticu** prvkov $x_1, x_2, \dots, x_n$, ktorú budeme označovať $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Platí, že

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \text{ práve vtedy ak } x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n \ .$$

Definícia

Karteziánsky súčin *$A \times B$ množín A a B je množina všetkých usporiadaných dvojíc (a,b), kde $a \in A$ a $b \in B$. Formálne zapisujeme*

$$A \times B = \{(a, b);\ a \in A,\ b \in B\} \, .$$

Karteziánsky súčin $A \times A$ niekedy zapisujeme ako mocninu, t.j. A^2, a podobne $A^3 = A \times A \times A$ atď.
Je zrejmé, že $C \times \emptyset = \emptyset \times C = \emptyset$ pre ľubovoľnú množinu C.

Binárne relácie

Definícia

Binárna relácia *z množiny A do množiny B je ľubovoľná podmnožina $\mathcal{R}$ karteziánskeho súčinu $A \times B$. Ak $A = B$, hovoríme o binárnej relácii na množine A, čo je ľubovoľná podmnožina $\mathcal{R} \subset A^2$.*

Ak $(a, b) \in \mathcal{R}$, hovoríme, že *prvok a je v relácii $\mathcal{R}$ s prvkom b* a zapisujeme $a\mathcal{R}b$. Analogicky namiesto $(a, b) \notin \mathcal{R}$ píšeme $a\overline{\mathcal{R}}b$.

Príklad 1. Majme množiny $A = \{1, 3, 4\}$ a $B = \{a, b\}$. Potom

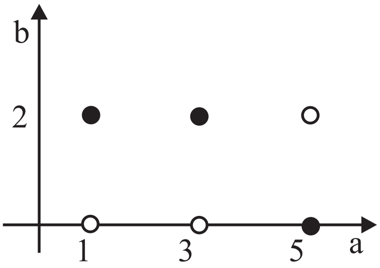
$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (3, a), (3, b), (4, a), (4, b)\}.$$

Príkladmi relácií z mmnožiny A do množiny B sú relácie:
$\mathcal{R}_1 = \{(1, a), (3, a), (3, b), (4, a)\}$, $\mathcal{R}_2 = \{(1, b), (3, a), (4, b)\}$, $\mathcal{R}_3 = A \times B, \ldots$

Príklad 2. Nech $A = \{1, 3, 5\}$, a $B = \{0, 2\}$. Nájdite a graficky znázornite reláciu $\mathcal{R}$, ktorá je definovaná:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow |\, a-2 \,| = |\, 2b-3 \,|, \quad a \in A, \quad b \in B\,.$$

Riešenie. Výpočtom zistíme, že $\mathcal{R} = \{(5, 0), (1, 2), (3, 2)\}$. Grafická interpretácia je na obr. 1.1. Plné krúžky sú prvkami množiny $\mathcal{R}$, všetky krúžky (plné aj prázdne) sú prvkami karteziánskeho súčinu $A \times B$.



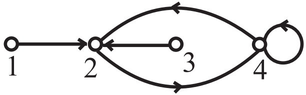
Maticová a grafová interpretácia

Ďalšími vhodnými interpretáciami binárnej relácie sú **maticová** a **grafová**. Ak $\mathcal{R} \subset A \times B$, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$, môžeme $\mathcal{R}$ zapísať pomocou matice $M_{\mathcal{R}} = (m_{ij})$ typu (n, m), kde

$$m_{ij} = \begin{cases} 1\,, & \text{ak } a_i \mathcal{R} a_j\,, \\ 0\,, & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

Pri grafovej interpretácii prvky množín A a B znázorňujeme krúžkami, ktoré budeme nazývať **vrcholy**. Usporiadanú dvojicu (a_i, b_j) znázorníme **šípkou** v smere od a_i k b_j, ktorú nazývame **orientovaná hrana**.
Na množine $A = \{1, 2, 3, 4\}$ majme reláciu $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 4), (3, 2), (4, 2), (4, 4)\}$.
Relácii $\mathcal{R}$ priradíme maticu

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Operácie s binárnymi reláciami

Definícia

Inverzná relácia *k binárnej relácii* $\mathcal{R} \subset A \times B$ *je binárna relácia* $\mathcal{R}^{-1} \subset B \times A$, *pričom* $\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a);\ (a, b) \in \mathcal{R}\}$, *pričom* $a \in A$ *a* $b \in B$.

Je zrejmé, že

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b\mathcal{R}^{-1}a \qquad \text{a} \qquad \left(\mathcal{R}^{-1}\right)^{-1} = \mathcal{R}\,.$$

Definícia

Nech A, B, C *sú množiny,* $\mathcal{R} \subset A \times B$ *je relácia z* A *do* B, *a* $\mathcal{S} \subset B \times C$ *je relácia z* B *do* C. **Súčinom (zložením) binárnych relácií** $\mathcal{R}$ *a* $\mathcal{S}$ *nazveme binárnu reláciu* $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} \subset A \times C$ *takú, že pre* $a \in A$ *a* $c \in C$ *je* $(a, c) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ *práve vtedy, ak existuje aspoň jedno* $b \in B$ *také, že* $(a, b) \in \mathcal{R}$ *a zároveň* $(b, c) \in \mathcal{S}$.

Veta (Asociatívny zákon)

Ak $\mathcal{R} \subset A \times B$, $\mathcal{S} \subset B \times C$ *a* $\mathcal{T} \subset C \times D$ *sú binárne relácie, tak*

$$(\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{T} = \mathcal{R} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{T})\,.$$

Vlastnosti binárnych relácií

Definícia

Binárna relácia $\mathcal{R}$ na množine A sa nazýva:
reflexívna, *ak pre všetky $a \in A$ platí $a\mathcal{R}a$;*
symetrická, *ak pre všetky $a, b \in A$ platí, že ak $a\mathcal{R}b$, tak aj $b\mathcal{R}a$;*
antisymetrická, *ak pre všetky $a, b \in A$ platí, že ak $a\mathcal{R}b$ aj $b\mathcal{R}a$, tak $a = b$;*
tranzitívna, *ak pre všetky $a, b, c \in A$ platí, že ak $a\mathcal{R}b$ a $b\mathcal{R}c$, tak aj $a\mathcal{R}c$.*

Ak znázorňujeme reláciu pomocou matice, tak matica odpovedajúca reflexívnej relácii má na hlavnej diagonále len jedničky. Matica reprezentujúca symetrickú reláciu je symetrická podľa hlavnej diagonály. Pri grafovej reprezentácii reflexívnej relácii odpovedá graf s orientovanou slučkou pri každom vrchole. V grafe reprezentujúcom symetrickú reláciu každú dvojicu vrcholov spájajú orientované hrany v oboch smeroch. Aj podmienka tranzitívnosti sa dá dobre vyjadriť pomocou orientovaných hrán: ak sú v grafe hrany z x do y a z y do z, musí tam byť aj hrana z a do z.

Ekvivalencia

Definícia

Hovoríme, že relácia $\mathcal{R}$ na množine A je **ekvivalencia** *na množine A, ak je reflexívna, symetrická a tranzitívna.*

Nech $\mathcal{R}$ je ekvivalencia na množine A a nech a je ľubovoľný prvok množiny A. Označme symbolom $\mathcal{R}[a]$ množinu všetkých prvkov x, ktoré sú v relácii s prvkom a (teda $\mathcal{R}[a] = \{x;\ a\mathcal{R}x\}$). $\mathcal{R}[a]$ sa nazýva **trieda ekvivalencie** $\mathcal{R}$ určená prvkom a.

Príklad

Nech $\mathcal{R} \subset A \times A$, $A = \{a, b, c, d\}$ daná vymenovaním prvkov. Zistite, či relácia $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (c, c), (c, b), (d, d)\}$ je ekvivalencia. Ak áno, určte triedy ekvivalencie.

Veta

Pre každú ekvivalenciu $\mathcal{R}$ na množine A platí

(i) *$\mathcal{R}[a]$ je neprázdna množina pre každý prvok $a \in A$.*

(ii) *Pre každé dva prvky a, b z množiny A buď $\mathcal{R}[a] = \mathcal{R}[b]$, alebo $\mathcal{R}[a] \cap \mathcal{R}[b] = \emptyset$.*

(iii) *Ak sú $\mathcal{R}$ a $\mathcal{S}$ dve ekvivalencie na množine A a pre každý prvok a z množiny A platí rovnosť $\mathcal{R}[a] = \mathcal{S}[a]$, potom $\mathcal{R} = \mathcal{S}$.*

Dôkaz. (ii) Nech a, b sú dané prvky. Ukážeme, že ak $a\mathcal{R}b$, tak $\mathcal{R}[a] = \mathcal{R}[b]$. Ukážeme najprv že $\mathcal{R}[a] \subset \mathcal{R}[b]$: Ak nejaké $x \in \mathcal{R}[a]$, potom $a\mathcal{R}x$ a zo symetrie aj $x\mathcal{R}a$. Keďže $x\mathcal{R}a$ a $a\mathcal{R}b$, z tranzitívnosti vyplýva že aj $x\mathcal{R}b$.Zo symetrie máme $b\mathcal{R}x$, čo znamená, že $x \in \mathcal{R}[b]$, a teda $\mathcal{R}[a] \subset \mathcal{R}[b]$. Podobne sa ukáže, že aj $\mathcal{R}[b] \subset \mathcal{R}[a]$,teda, $\mathcal{R}[a] = \mathcal{R}[b]$.
Teraz ukážeme, že ak neplatí $a\mathcal{R}b$, tak $\mathcal{R}[a] \cap \mathcal{R}[b] = \emptyset$. Postupujeme sporom: Nech existuje $x \in \mathcal{R}[a] \cap \mathcal{R}[b]$. Potom $a\mathcal{R}x$ a zo symetrie aj $x\mathcal{R}b$. Z tranzitívnosti dostávame $a\mathcal{R}b$, čo je spor.

Veta

Každá ekvivalencia na neprázdnej množine určuje rozklad tejto množiny a každý rozklad množiny A definuje ekvivalenciu na tejto množine.

Zobrazenia

Definícia

Zobrazenie *z množiny* A *do množiny* B *je binárna relácia* $f \subset A \times B$ *s vlastnosťami:*

a) ku každému $a \in A$ *existuje* $b \in B$ *tak, že* $(a, b) \in f$,

b) ak $(a, b) \in f$ *a* $(a, c) \in f$, *tak* $b = c$.

Namiesto slova *zobrazenie* sa v rovnocennom význame často používa slovo *funkcia*. To, že f je zobrazenie z množiny A do množiny B, zapisujeme takto: $f : A \to B$. Prvok a je **vzorom** prvku b a prvok b je **obrazom** prvku a pri zobrazení f. Namiesto

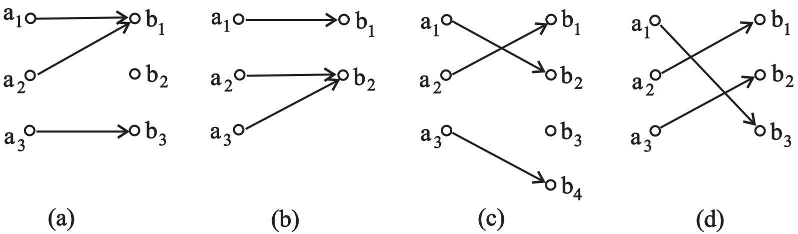
$$afb \qquad \text{alebo} \qquad (a, b) \in f$$

obvykle píšeme

$$b = f(a)\,.$$

Definícia

Zobrazenie $f : A \to B$ sa nazýva:
surjektívne, *ak ku každému $b \in B$ existuje aspoň jedno $a \in A$ tak, že $b = f(a)$,*
injektívne, *ak z $a_1 \neq a_2$, $a_1, a_2 \in A$ vyplýva $f(a_1) \neq f(a_2)$,*
bijektívne, *ak je surjektívne aj injektívne.*



Zobrazenie (a) nie je surjektívne ani injektívne, (b) je surjektívne, ale nie je injektívne, (c) je injektívne, ale nie je surjektívne a (d) je surjektívne aj injektívne, teda bijektívne.

Inverzné zobrazenie

Každé zobrazenie f je binárne relácia z A do B, preto existuje aj binárna relácia f^{-1} z B do A, ktorá vo všeobecnosti nie je zobrazením (funkciou).

Veta

Nech f je zobrazenie z A do B. Potom f^{-1} je zobrazenie z B do A práve vtedy, ak f je bijektívne zobrazenie.

Dôkaz. Nech f^{-1} je zobrazenie z B do A. Potom každý prvok $b \in B$ má práve jeden obraz $f^{-1}(b) \in A$, a teda každý prvok $b \in B$ je obrazom práve jedného prvku z A v zobrazení f, čo je bijektívnosť zobrazenia f.
Naopak, nech f je bijektívne zobrazenie z A do B. Potom každý prvok $b \in B$ má práve jeden vzor v množine A, a teda f^{-1} je zobrazenie, lebo každý prvok $b \in B$ má práve jeden obraz $f^{-1}(b) \in A$. $\square$

Čiastočne usporiadané množiny

Definícia

Nech $A \neq \emptyset$. *Binárna relácia* $\mathcal{R}$ *na množine* A *je* **reláciou čiastočného usporiadania** *práve vtedy, ak pre všetky* $a, b, c \in A$ *platí:*

$a\mathcal{R}a$,

$a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b$,

$a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$,

t.j. $\mathcal{R}$ *je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna na* A.

Usporiadaná dvojica $(A; \mathcal{R})$ *sa nazýva* **čiastočne usporiadaná množina**.

Príkladmi čiastočne usporiadaných množín sú napr.:

- Množina $\mathbb{N}$ s reláciou deliteľnosti – $(\mathbb{N}, |)$;
- Potenčná množina množiny M s reláciou inklúzie – $(P(M) \subseteq)$;
- Množina $\mathbb{R}$ s reláciou usporiadania čísel podľa veľkosti – $(\mathbb{R}, \leq)$,...
- Množina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s reláciou usporiadania čísel podľa veľkosti – $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \leq)$, kde $(a, b) \leq (c, d)$, ak $A \leq c$ a $b \leq d$.

Lineárne usporiadané množiny

Definícia

čiastočne usporiadaná množina $(A; \mathcal{R})$, *v ktorej pre všetky* $a, b \in A$ *platí* $a\mathcal{R}b$ *alebo* $b\mathcal{R}a$ *sa nazýva* **lineárne usporiadaná množina**.

Príklad

Nech $A = \{a, b, c\}$. *Utvorme potenčnú množinu* $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. *ľahko overíme, že* $(\mathcal{P}(A); \subseteq)$ *je čiastočne usporiadaná množina. Nie je však lineárne usporiadaná, lebo napríklad* $\{c\} \not\subseteq \{a, b\}$ *ani* $\{a, b\} \not\subseteq \{c\}$.

Príklad

Nech A *je neprázdna podmnožina množiny reálnych čísel* $\mathbb{R}$. *Potom* $(A; \leq)$ *je čiastočne usporiadaná množina a je aj lineárne usporiadaná.*

Hasseho diagram

Definícia

Nech $(A; \mathcal{R})$ *je čiastočne usporiadaná množina a nech* $a, b \in A$*. Hovoríme, že prvok* b **pokrýva** *prvok* a*, ak* $a \neq b$ *a platí:*

1. $a\mathcal{R}b$,
2. *neexistuje* $x \in A$, $x \neq a$, $x \neq b$ *taký, že* $a\mathcal{R}x$ *a súčasne* $x\mathcal{R}b$.

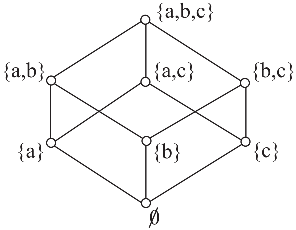
Čiastočne usporiadané množiny $(A; \mathcal{R})$ budeme znázorňovať pomocou tzv. **Hasseho diagramov**. Vrcholy odpovedajúce prvkom množiny A umiestnime v rovine tak, že ak $a\mathcal{R}b$, tak vrchol a umiestnime nižšie ako vrchol b. Vrcholy a, b spojíme čiarou (hranou) práve vtedy, ak prvok b pokrýva prvok a.

Príklad (a)

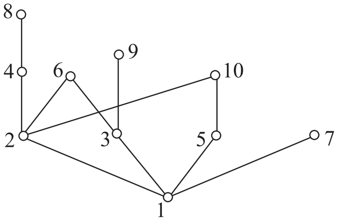
Znázornite Hasseho diagram ČUM $(P(A), \subseteq)$, *ak* $A = \{a, b, c\}$.

Príklad (b)

Znázornite Hasseho diagram ČUM $(A, |)$, *ak* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.



(a)



(b)

Najväčší a maximálny prvok
Najmenší a minimálny prvok

Definícia

Nech $(A;\mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina. Prvok $a \in A$ sa nazýva **najmenší** *prvok v $(A;\mathcal{R})$, ak pre každý prvok $x \in A$ platí $a\mathcal{R}x$.*
Prvok $a \in A$ sa nazýva **minimálny** *prvok v $(A;\mathcal{R})$, ak neexistuje prvok $x \in A$, $x \neq a$ taký, že $x\mathcal{R}a$.*

Definícia

Nech $(A;\mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina. Prvok $a \in A$ sa nazýva **najväčší** *prvok v $(A;\mathcal{R})$, ak pre každý prvok $x \in A$ platí $x\mathcal{R}a$.*
Prvok $a \in A$ sa nazýva **maximálny** *prvok v $(A;\mathcal{R})$, ak neexistuje prvok $x \in A$, $x \neq a$ taký, že $a\mathcal{R}x$.*

Najmenší (najväčší) prvok je zároveň aj minimálnym (maximálnym) prvkom čiastočne usporiadanej množiny, ale naopak to neplatí. Ak čiastočne usporiadaná množina má najmenší, resp. najväčší prvok, je jediným a je zároveň aj jej jediným minimálnym, resp. maximálnym prvkom.

Supremum a infimum množiny

Nech M je neprázdna podmnožina množiny A. Ak $(A;\mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina, tak aj $(M;\mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina. Hovoríme, že d je **najväčší** (**najmenší, maximálny, minimálny**) prvok množiny $M \subset A$, ak je najväčším (najmenším, maximálnym, minimálnym) prvkom čiastočne usporiadanej množiny $(M;\mathcal{R})$.

Definícia

Nech $(A;\mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina a $\emptyset \neq M \subset A$. Množina

$$h(M) = \{x \in A;\ (\forall a \in M:\ a\mathcal{R}x)\}$$

je **množina všetkých horných ohraničení** *množiny M a množina*

$$d(M) = \{x \in A;\ (\forall a \in M:\ x\mathcal{R}a)\}$$

je **množina všetkých dolných ohraničení** *množiny M.*
Najmenší prvok množiny $h(M)$, ak existuje, sa nazýva **supremum** *množiny M a zapisuje sa* **sup** M .
Najväčší prvok množiny $d(M)$, ak existuje, sa nazýva **infimum** *množiny M a zapisuje sa* **inf** M.

Zväzy

Nech $(A; \mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina a nech $x, y \in A$. Pre *inf* $\{x, y\}$ a *sup* $\{x, y\}$, ak existujú, zavedieme tieto označenia:

$$inf\ \{x, y\} = x \dot{\wedge} y$$

a čítame **priesek** prvkov x a y. ďalej

$$sup\ \{x, y\} = x \underset{\cdot}{\vee} y$$

a čítame **spojenie** prvkov x a y.

Nie každá dvojica prvkov musí mať spojenie, resp. priesek. V lineárne usporiadanej množine majú každé dva prvky priesek aj spojenie, pričom priesek je menší z prvkov a spojenie je väčší z nich.

Definícia

Zväz *je čiastočne usporiadaná množina, v ktorej každé dva prvky majú spojenie aj priesek.*

Vlastnosti prieseku a spojenia

Veta

Nech $(L; \mathcal{R})$ je zväz. Potom pre ľubovoľné $x, y, z \in L$ platí:

$x \dot\vee x = x$,	$x \dot\wedge x = x$,	*idempotentnosť*,
$x \dot\vee y = y \dot\vee x$,	$x \dot\wedge y = y \dot\wedge x$,	*komutatívnosť*,
$x \dot\vee (y \dot\vee z) = (x \dot\vee y) \dot\vee z$,	$x \dot\wedge (y \dot\wedge z) = (x \dot\wedge y) \dot\wedge z$,	*asociatívnosť*,
$x \dot\vee (y \dot\wedge x) = x$,	$x \dot\wedge (y \dot\vee x) = x$,	*absorbcia*.

Zväz môžeme definovať aj nasledovne:

Definícia

Zväz *je algebraický systém $(L; \dot\vee, \dot\wedge)$, kde $L \neq \emptyset$ a pre operácie prieseku $\dot\wedge$ a spojenia $\dot\vee$ platia vlastnosti: idempotentnosť, komutatívnosť, asociatívnosť a absorbcia.*

Distributívne zväzy

Definícia

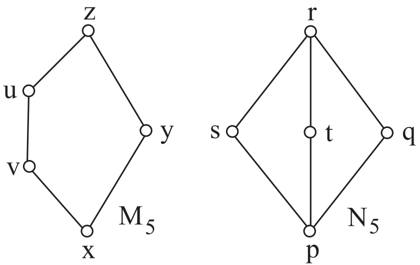
Zväz $(L; \underset{\cdot}{\vee}, \dot{\wedge})$ *sa nazýva* **distributívny**, *ak pre všetky* $x, y, z \in L$ *platí:*

$$x \dot{\wedge} (y \underset{\cdot}{\vee} z) = (x \dot{\wedge} y) \underset{\cdot}{\vee} (x \dot{\wedge} z),$$
$$x \underset{\cdot}{\vee} (y \dot{\wedge} z) = (x \underset{\cdot}{\vee} y) \dot{\wedge} (x \underset{\cdot}{\vee} z).$$

Na obrázku sú Hasseho diagramy zväzov N_5 a M_5. Nie sú distributívne, lebo v každom sa dá nájsť trojica prvkov, pre ktorú neplatí aspoň jedna z rovností v definícii.

N_5: $u \dot{\wedge} (v \underset{\cdot}{\vee} y) = u \dot{\wedge} z = u$, $\quad (u \dot{\wedge} v) \underset{\cdot}{\vee} (u \dot{\wedge} y) = v \underset{\cdot}{\vee} x = v$.

M_5: $s \dot{\wedge} (t \underset{\cdot}{\vee} q) = s \dot{\wedge} r = s$, $\quad (s \dot{\wedge} t) \underset{\cdot}{\vee} (s \dot{\wedge} q) = p \underset{\cdot}{\vee} p = p$.



Komplementárne a boolovské zväzy

V každom konečnom zväze existuje jediný najväčší prvok I (**horné univerzálne ohraničenie**) a jediný najmenší prvok 0 (**dolné univerzálne ohraničenie**). Tieto prvky môžeme označiť aj v symbolickom zápise zväzu takto: $(L; \underset{\cdot}{\vee}, \dot{\wedge}, 0, I)$.

Definícia

Nech $(L; \underset{\cdot}{\vee}, \dot{\wedge}, 0, I)$ *je zväz. Prvok* $x' \in L$ *nazývame* **komplementom** *prvku* $x \in L$ *práve vtedy, ak*

$$x \dot{\wedge} x' = 0 \qquad a \qquad x \underset{\cdot}{\vee} x' = I\,.$$

Existujú zväzy, v ktorých niektoré prvky majú viac komplementov.

Definícia

Zväz $(L; \underset{\cdot}{\vee}, \dot{\wedge}, 0, I)$ *sa nazýva* **komplementárny** *práve vtedy, ak každý jeho prvok má komplement. Distributívny a komplementárny zväz nazývame* **boolovským zväzom**.

Veta

V boloovskom zväze $(L; \underset{\cdot}{\vee}, \dot{\wedge}, 0, I)$ *má každý prvok práve jeden komplement.*

Výrok je tvrdenie v tvare oznamovacej vety, ktoré je dostatočne zmysluplné, aby bolo možné uvažovať, či je pravdivé alebo nepravdivé.

Príklad

Určte, či nasledujúce vety sú výrokom.

Dnes je pondelok.	áno
Aký je dnes deň?	nie
FEI TU Košice	nie
Musím ísť do školy.	áno
Určite choď do školy.	nie

Jednoduchý výrok je tvrdenie, ktorého žiadna časť nie je výrokom.
Zložený výrok má vlastné časti, ktoré sú výrokom. Vzniká z jednoduchých výrokov použitím logických spojok.

Príklad

Majme štyri jednoduché výroky:

- „Je pondelok."
- „Musím ísť do školy."
- „Mám prednášku z Diskrétnej matematiky."
- „Je škaredé počasie."

Vytvorme nasledujúce zložené výroky:

- „Nie je pravda, že je pondelok."
- „Je škaredé počasie a musím ísť do školy."
- „Je pondelok alebo je škaredé počasie."[1]
- „Ak je pondelok, tak mám prednášku z Diskrétnej matematiky."
- „Musím ísť do školy práve vtedy, keď mám prednášku z Diskrétnej matematiky."

Logické spojky:

- negácia – hovoríme „nie je pravda, že", označujeme ju symbolom $\overline{x}$,
- konjunkcia – hovoríme „a", označujeme ju symbolom $\wedge$,
- disjunkcia – hovoríme „alebo", označujeme ju symbolom $\vee$,
- implikácia – hovoríme „ak ..., tak ...", označujeme ju symbolom $\Rightarrow$,
- ekvivalencia – hovoríme „práve vtedy, keď", označujeme ju symbolom $\Leftrightarrow$.

[1] Na rozdiel od „bežného" jazyka sa tieto dve možnosti nevylučujú, t.j. môže byť súčasne pondelok aj škaredé počasie.

Abeceda výrokovej logiky

Definícia

Abeceda výrokovej logiky je množina pozostávajúca zo symbolov pre

a) výrokové premenné: p, q, $r, \dots,$ o ktorých predpokladáme, že ich máme k dispozícii nekonečne veľa

b) logické spojky: negácia, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

c) pomocné symboly – zátvorky.

Ľubovoľnú postupnosť prvkov abecedy výrokovej logiky nazývame *slovo* nad abecedou výrokovej logiky.

Príklad

Vhodnou voľbou výrokových premenných zapíšte nasledujúce výroky pomocou logických spojok.

a) „Na výlet pôjde Peter alebo nepôjde Rado.“
b) „Ak pôjde Rado na výlet, potom nepôjde Stano“
c) „Stano pôjde na výlet práve vtedy, keď pôjde Táňa.“
d) „Na výlet pôjde Rado alebo pôjde Peter s Táňou.“
e) „Na výlet pôjde Rado, ale nepôjde Táňa.“
f) „Rado a Stano spolu na výlet nepôjdu.“

Označme: r – „Rado pôjde.“, s – „Stano pôjde.“, p – „Peter pôjde.“, t – „Táňa pôjde.“ Výrokom zodpovedajú tzv. „formuly“:

a) $p \vee \overline{r}$
b) $r \Rightarrow \overline{s}$
c) $s \Leftrightarrow t$
d) $r \vee (p \wedge t)$
e) $r \wedge \overline{t}$
f) $\overline{r \wedge s}$

Formula výrokovej logiky

Definícia

Postupnosť slov $\alpha_1, \ \alpha_2, \ldots, \ \alpha_n$ nazývame vytvárajúca postupnosť formuly, ak pre ľubovoľné $i \leq n$ je splnená práve jedna z týchto podmienok:

a) α_i je výroková premenná,
b) α_i je negácia niektorého prvku množiny $\{\alpha_1, \ \alpha_2, \ldots, \ \alpha_{i-1}\}$,
c) α_i je tvaru $(\alpha_j \wedge \alpha_k)$, $(\alpha_j \vee \alpha_k)$, $(\alpha_j \Rightarrow \alpha_k)$, $(\alpha_j \Leftrightarrow \alpha_k)$ pre nejaké $j, \ k \ < \ i$.

Definícia

Slovo α nad abecedou výrokovej logiky sa nazýva formula výrokovej logiky práve vtedy, keď existuje taká vytvárajúca postupnosť formuly, že jej posledným členom je α.
Postupnosť slov $\alpha_1, \ \alpha_2, \ldots, \ \alpha_n = \alpha$ nazývame vytvárajúca postupnosť formuly α.

Podformula

Definícia

Podformulou formuly α nazývame formulu výrokovej logiky, ktorá sa vyskytuje vo všetkých vytvárajúcich postupnostiach formuly α.

Príklad

Napíšte vytvárajúcu postupnosť formuly

$$(p \vee r) \Leftrightarrow ((q \Rightarrow \overline{p}) \wedge r).$$

Riešenie. Vytvárajúca postupnosť je:
$p,\ r,\ q,\ \overline{p},\ p \vee r,\ q \Rightarrow \overline{p},\ (q \Rightarrow \overline{p}) \wedge r,\ (p \vee r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \overline{p})$. Podformulami danej formuly sú všetky členy vytvárajúcej postupnosti.

Základy sémantiky výrokovej logiky

Definícia

Pravdivostné ohodnotenie v výrokových premenných je priradenie hodnoty 0 alebo 1 každej z týchto premenných.

Definícia

Pravdivostná hodnota $v(\alpha)$ výrokovej formuly α pri ohodnotení u výrokových premenných je priradenie hodnoty 0 alebo 1 pre formulu v súlade s nasledujúcimi pravidlami.
Ak $v(\alpha) = 1$ hovoríme, že formula α je pravdivá pri ohodnotení v.
Ak $v(\alpha) = 0$ hovoríme, že formula α je nepravdivá pri ohodnotení v.

Vlastnosti pravdivostného ohodnotenia formúl znázorňujeme pomocou pravdivostných tabuliek logických spojok. Sú to:

α	$\overline{\alpha}$
0	1
1	0

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Definícia

Formula sa nazýva tautológia, keď je pravdivá pri každom ohodnotení výrokových premenných a kontradikcia, keď je pri každom ohodnotení výrokových premenných nepravdivá.
Formula je splniteľná, keď existuje také ohodnotenie výrokových premenných, pri ktorom je pravdivá. Systém formúl $\mathcal{S}$ je splniteľný, keď existuje také ohodnotenie výrokových premenných, pri ktorom sú pravdivé všetky formuly systému.

Príklad

Rozhodnime, či formula $\varphi(x, y) : \ (y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (y \vee \overline{x})$ je tautológia, kontradikcia alebo splniteľná formula.

Riešenie. Vytvorme tabuľku pravdivostných hodnôt pre danú formulu.

x	y	$y \Rightarrow x$	$y \vee \overline{x}$	$(y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (y \vee \overline{x})$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Formula nie je tautológia ani kontradikcia, je to splniteľná formula.

Príklad

Janko, Mišo a Slavo sú podozriví z krádeže triednej knihy. Podozriví tvrdia:

- Janko: „Mišo je vinný a Slavo je nevinný."
- Mišo: „Ak je vinný Janko, tak je vinný aj Slavo."
- Slavo: „Ja som nevinný, ale najmenej jeden z ostatných je vinný."

Kto je vinný, ak predpokladáme, že všetci hovoria pravdu?

Riešenie. Označme výrokovými premennými j, m, s postupne výroky „Janko je vinný.", „Mišo je vinný.", „Slavo je vinný.". Výpovede všetkých troch podozrivých zapíšeme pomocou formúl výrokovej logiky. Zistíme, či systém formúl $\mathcal{S} = \{m \wedge \bar{s},\ j \Rightarrow s,\ \bar{s} \wedge (j \vee m)\}$ je splniteľný.

j	m	s	$\bar{s}$	$m \wedge \bar{s}$	$j \Rightarrow s$	$\bar{s} \wedge (j \vee m)$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0

Systém formúl je splniteľný, lebo všetky formuly sú pravdivé v treťom riadku, v ktorom je ohodnotenie výrokových premenných $u(j) = 0,\ u(m) = 1,\ u(s) = 0$.

Teda vinný je iba Mišo.

Relácia vyplývania

Definícia

Hovoríme, že formula φ vyplýva zo systému formúl $\mathcal{S}$ práve vtedy, keď je pravdivá pri každom ohodnotení výrokových premenných, pri ktorom je pravdivá každá formula zo systému $\mathcal{S}$. Zapisujeme $\mathcal{S} \models \varphi$.

Príklad

Rozhodnime, či platí $\mathcal{S} \models \alpha$, *ak* $\mathcal{S} = \{p \Rightarrow q,\ p \vee q\}, \quad \alpha:\ \overline{q} \Rightarrow p$.

Riešenie.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee q$	α
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1 $\surd$
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1 $\surd$

$\mathcal{S} \models \alpha$ platí.

Príklad

Zistite, či z daných predpokladov vyplýva záver.

Predpoklady:

- Ján nie je učiteľ.
- Neplatí, že Ján je učiteľ a zároveň je bohatý.
- Ak Ján je majiteľ prosperujúcej firmy, je bohatý.

Záver: Ján nie je majiteľ prosperujúcej firmy.

Riešenie: Označme u – „Ján je učiteľ.“, b – „Ján je bohatý.“, m – „Ján je majiteľ prosperujúcej firmy.“ Potom predpoklady môžeme zapísať množinou formúl $\mathcal{S} = \{\overline{u},\ \overline{(u \wedge b)},\ m \Rightarrow b\}$ a záver formulou $\varphi : \overline{m}$.

u	b	m	$\overline{u}$	$\overline{(u \wedge b)}$	$m \Rightarrow b$	$\overline{m}$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1 $\surd$
0	1	1	1	1	1	0 $\times$
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0

$\{\overline{u},\ \neg(u \wedge b),\ m \Rightarrow b\} \not\models \overline{m}$.
Úvaha nie je správna, záver nevyplýva z uvedených predpokladov.

Sémantická ekvivalencia formúl

Veta

Platia nasledujúce tvrdenia:

1. Ak $\mathcal{S}$ je množina formúl a $\varphi \in \mathcal{S}$, tak $\mathcal{S} \models \varphi$.
2. Tautológia je sémantickým dôsledkom každej množiny formúl $\mathcal{S}$.
3. $\mathcal{S}, \varphi \models \psi$ práve vtedy, keď $\mathcal{S} \models (\varphi \Rightarrow \psi)$.

Definícia

Hovoríme, že formuly φ a ψ sú ekvivalentné, keď $\varphi \models \psi$ aj $\psi \models \varphi$. Fakt, že formuly φ a ψ sú ekvivalentné, zapisujeme $\varphi \models\mid \psi$.

Veta

Formuly φ a ψ sú ekvivalentné práve vtedy, keď pre každé pravdivostné ohodnotenie v platí $v(\varphi) = v(\psi)$, t.j. $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je tautológia.

Veta

Pre ľubovoľné formuly výrokovej logiky $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ platí

1. $\alpha \wedge \alpha \models\!\!\!\!\!\dashv \alpha$
   $\alpha \vee \alpha \models\!\!\!\!\!\dashv \alpha$ — idempotencia $\wedge$ a $\vee$;
2. $\alpha \wedge \beta \models\!\!\!\!\!\dashv \beta \wedge \alpha$
   $\alpha \vee \beta \models\!\!\!\!\!\dashv \beta \vee \alpha$ — komutatívnosť $\wedge$ a $\vee$;
3. $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \models\!\!\!\!\!\dashv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$,
   $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \models\!\!\!\!\!\dashv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ — asociatívnosť $\wedge$ a $\vee$;
4. $\alpha \wedge (\beta \vee \alpha) \models\!\!\!\!\!\dashv \alpha$
   $\alpha \vee (\beta \wedge \alpha) \models\!\!\!\!\!\dashv \alpha$ — absorpcia $\wedge$ a $\vee$;
5. $\overline{\overline{\alpha}} \models\!\!\!\!\!\dashv \alpha$; — zákon dvojitej negácie;
6. $\overline{\alpha \wedge \beta} \models\!\!\!\!\!\dashv (\overline{\alpha} \vee \overline{\beta})$
   $\overline{\alpha \vee \beta} \models\!\!\!\!\!\dashv (\overline{\alpha} \wedge \overline{\beta})$ — de Morganove pravidlá;
7. $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \models\!\!\!\!\!\dashv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$,
   $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \models\!\!\!\!\!\dashv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ — distributívne zákony;
8. $\alpha \Rightarrow \beta \models\!\!\!\!\!\dashv \overline{\alpha} \vee \beta$ — zákon nahradenia implikácie;
9. $\boldsymbol{T} \wedge \alpha \models\!\!\!\!\!\dashv \alpha$, $\quad \boldsymbol{T} \vee \alpha \models\!\!\!\!\!\dashv \boldsymbol{T}$,
   $\boldsymbol{F} \wedge \alpha \models\!\!\!\!\!\dashv \boldsymbol{F}$, $\quad \boldsymbol{F} \vee \alpha \models\!\!\!\!\!\dashv \alpha$;
   $\alpha \wedge \overline{\alpha} \models\!\!\!\!\!\dashv \boldsymbol{F}$, $\quad \alpha \vee \overline{\alpha} \models\!\!\!\!\!\dashv \boldsymbol{T}$. — $\boldsymbol{T}$ – tautológia, $\boldsymbol{F}$ – kontradikcia;

Elementárna konjunkcia a elementárna disjunkcia

Nech p je výroková premenná a $c \in \{0, 1\}$. Potom

$$p^c = \begin{cases} p, & \text{ak } c = 1, \\ \overline{p}, & \text{ak } c = 0. \end{cases}$$

Definícia

Nech $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sú výrokové premenné. Elementárna konjunkcia je formula, ktorá má tvar

$$p_1^{c_1} \wedge p_2^{c_2} \wedge \cdots \wedge p_n^{c_n}$$

a elementárna disjunkcia je formula, ktorá má tvar

$$p_1^{c_1} \vee p_2^{c_2} \vee \cdots \vee p_n^{c_n}.$$

Elementárne konjunkcie	Elementárne disjunkcie
$x^1 \wedge y^0 \wedge z^0 = x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$	$x^0 \vee y^0 \vee z^1 = \overline{x} \vee \overline{y} \vee z$
$p^0 \wedge q^1 = \overline{p} \wedge q$	$p^0 \vee q^0 \vee r^1 = \overline{p} \vee \overline{q} \vee r$

Výroková premenná alebo jej negácia je súčasne elementárnou konjunkciou aj elementárnou disjunkciou.

2.4. Normálny konjunktívny a normálny disjunktívny tvar

Definícia

Hovoríme, že formula je v disjunktívnom normálnom tvare (DNT) práve vtedy, keď je disjunkciou elementárnych konjunkcií. Hovoríme, že formula je v konjunktívnom normálnom tvare (KNT) práve vtedy, keď je konjunkciou elementárnych disjunkcií.

Definícia

Hovoríme, že formula α má úplný disjunktívny normálny tvar a formula β má úplný konjunktívny normálny tvar práve vtedy, keď α je v normálnom disjunktívnom (resp. β je v konjunktívnom normálnom tvare) tvare a každá elementárna konjunkcia v α (resp. elementárna disjunkcia v β) obsahuje všetky výrokové premenné danej formuly.

Príklad

Napíšte v disjunktívnom normálnom tvare a konjunktívnom normálnom tvare formulu $(r \wedge \overline{p}) \Rightarrow (p \wedge \overline{q})$.

Riešenie.
DNT: $(r \wedge \overline{p}) \Rightarrow (p \wedge \overline{q}) \mathrel{\Dashv\vDash} \overline{r \wedge \overline{p}} \vee (p \wedge \overline{q}) \mathrel{\Dashv\vDash} (\overline{r} \vee p) \vee (p \wedge \overline{q}) \mathrel{\Dashv\vDash}$
$\mathrel{\Dashv\vDash} (\overline{r}) \vee (p) \vee (p \wedge \overline{q})$.
KNT: $(r \wedge \overline{p}) \Rightarrow (p \wedge \overline{q}) \mathrel{\Dashv\vDash} (\overline{r} \vee p) \vee (p \wedge \overline{q}) \mathrel{\Dashv\vDash} (\overline{r} \vee p \vee p) \wedge (\overline{r} \vee p \vee \overline{q})$
$\mathrel{\Dashv\vDash} (\overline{r} \vee p) \wedge (\overline{r} \vee p \vee \overline{q})$.

Príklad

Napíšte v disjunktívnom normálnom tvare a konjunktívnom normálnom tvare formulu $(p \wedge \overline{q}) \Leftrightarrow r$.

Riešenie. Označme $\alpha = p \wedge \overline{q}$, $\beta = r$.
KNT: $\alpha \Leftrightarrow \beta \mathrel{\Dashv\vDash} (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha) \mathrel{\Dashv\vDash} (\overline{\alpha} \vee \beta) \wedge (\overline{\beta} \vee \alpha) \mathrel{\Dashv\vDash}\mathrel{\Dashv\vDash} (\overline{(p \wedge \overline{q})} \vee r) \wedge (\overline{r} \vee (p \wedge \overline{q})) \mathrel{\Dashv\vDash} (\overline{p} \vee q \vee r) \wedge (\overline{r} \vee p) \wedge (\overline{r} \vee \overline{q})$.

DNT: $\alpha \Leftrightarrow \beta \mathrel{\Dashv\vDash} (\overline{\alpha} \vee \beta) \wedge (\overline{\beta} \vee \alpha) \mathrel{\Dashv\vDash} (\overline{\alpha} \wedge \alpha) \vee (\overline{\alpha} \wedge \overline{\beta}) \vee (\beta \wedge \alpha) \vee (\overline{\beta} \wedge \beta) \mathrel{\Dashv\vDash}$
$\mathbf{F} \vee (\overline{\alpha} \wedge \overline{\beta}) \vee (\beta \wedge \alpha) \vee \mathbf{F} \mathrel{\Dashv\vDash} (\overline{\alpha} \wedge \overline{\beta}) \vee (\beta \wedge \alpha) \mathrel{\Dashv\vDash} (\overline{p \wedge \overline{q}} \wedge \overline{r}) \vee (r \wedge (p \wedge \overline{q})) \mathrel{\Dashv\vDash}$
$(\overline{p} \vee q) \wedge \overline{r}) \vee (r \wedge p \wedge \overline{q}) \mathrel{\Dashv\vDash} (\overline{p} \wedge \overline{r}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (r \wedge p \wedge \overline{q})$.

Boolovské algebry

Definícia

Boolovská algebra je algebraický systém $\mathcal{B} = (L, \underset{\cdot}{\vee}, \dot{\wedge}, ', O, I)$, *pričom pre ľubovoľné* $x, y, z \in L$ *platí:*

1. $x \underset{\cdot}{\vee} y = y \underset{\cdot}{\vee} x;$
2. $x \dot{\wedge} y = y \dot{\wedge} x;$
3. $x \dot{\wedge} (y \dot{\wedge} z) = (x \dot{\wedge} y) \dot{\wedge} z;$
4. $x \underset{\cdot}{\vee} (y \underset{\cdot}{\vee} z) = (x \underset{\cdot}{\vee} y) \underset{\cdot}{\vee} z;$
5. $x \dot{\wedge} (y \underset{\cdot}{\vee} z) = (x \dot{\wedge} y) \underset{\cdot}{\vee} (x \dot{\wedge} z);$
6. $x \underset{\cdot}{\vee} (y \dot{\wedge} z) = (x \underset{\cdot}{\vee} y) \dot{\wedge} (x \underset{\cdot}{\vee} z);$
7. $x \underset{\cdot}{\vee} O = x;$
8. $x \dot{\wedge} x' = O;$
9. $x \underset{\cdot}{\vee} x' = I;$
10. $x \dot{\wedge} I = x$

Veta

Nech $\mathcal{B}$ *je boolovská algebra. Potom pre ľubovoľné* $x, y, z \in L$ *platí:*

1. $x \underset{\cdot}{\vee} x = x \dot{\wedge} x = x;$
2. $x \dot{\wedge} O = O;$
3. $x \underset{\cdot}{\vee} I = I;$
4. $(x')' = x;$
5. $(x \underset{\cdot}{\vee} y)' = x' \dot{\wedge} y';$
6. $(x \dot{\wedge} y)' = x' \underset{\cdot}{\vee} y';$
7. $x \underset{\cdot}{\vee} (x \dot{\wedge} y) = x \dot{\wedge} (x \underset{\cdot}{\vee} y) = x;$
8. $x \underset{\cdot}{\vee} (x' \dot{\wedge} y) = x \underset{\cdot}{\vee} y;$
9. $x \dot{\wedge} (x' \underset{\cdot}{\vee} y) = x \dot{\wedge} y;$
10. $x \underset{\cdot}{\vee} y = O \Leftrightarrow x = y = O;$
11. $x \dot{\wedge} y = I \Leftrightarrow x = y = I;$
12. $x = y \Leftrightarrow (x \dot{\wedge} y') \underset{\cdot}{\vee} (x' \dot{\wedge} y) = O \Leftrightarrow (x \underset{\cdot}{\vee} y') \dot{\wedge} (x' \underset{\cdot}{\vee} y) = I.$

Boolovské funkcie

Definícia

Nech $D = \{0, 1\}$. Funkciu $f : D^n \to D$ nazývame boolovská funkcia n premenných.

Každá boolovská funkcia priradí n-tici núl a jednotiek hodnotu nula alebo jedna. Existuje 16 rôznych boolovských funkcií dvoch premenných:

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1

Jednotlivé funkcie môžeme zapísať takto:

$f_1 = x$ $\quad f_5 = x \dot{\wedge} y$ $\quad f_9 = x \underset{\cdot}{\vee} y$ $\quad f_{13} = x \dot{\wedge} x'$

$f_2 = y$ $\quad f_6 = x \dot{\wedge} y'$ $\quad f_{10} = x \underset{\cdot}{\vee} y'$ $\quad f_{14} = x \underset{\cdot}{\vee} x'$

$f_3 = x'$ $\quad f_7 = x' \dot{\wedge} y$ $\quad f_{11} = x' \underset{\cdot}{\vee} y$ $\quad f_{15} = (x \dot{\wedge} y') \underset{\cdot}{\vee} (x' \dot{\wedge} y)$

$f_4 = y'$ $\quad f_8 = x' \dot{\wedge} y'$ $\quad f_{12} = x' \underset{\cdot}{\vee} y'$ $\quad f_{16} = (x \dot{\wedge} y) \underset{\cdot}{\vee} (x' \dot{\wedge} y')$

Definícia

Nech f, g sú boolovské funkcie. Potom

- **Spojenie** *boolovských funkcií f a g je funkcia*

$$(f \dot{\vee} g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \dot{\vee} g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- **Priesek** *boolovských funkcií f a g je funkcia*

$$(f \dot{\wedge} g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \dot{\wedge} g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- **Komplement** *k boolovskej funkcii f je funkcia*

$$f'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f(x_1, x_2, \ldots, x_n))'$$

Definícia

Hovoríme, že boolovské funkcie n premenných f a g sa rovnajú, keď $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pre každé $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D^n$.

Realizácia boolovskej funkcie

Každej formule $\alpha(p_1, p_2, \dots, p_n)$ výrokovej logiky prislúcha tabuľka pravdivostných hodnôt. Avšak tá istá tabuľka hodnôt jednoznačne určuje istú boolovskú funkciu n premenných, ktorú označíme f_α a budeme ju nazývať **pravdivostnou funkciou formuly** α.
K danej funkcii boolovskej funkcii f máme nájsť takú formulu α, že $f = f_\alpha$.

Definícia

Formula α **realizuje boolovskú funkciu** f *práve vtedy, ak* $f = f_\alpha$.

Je zrejmé, že dve formuly sú sémanticky ekvivalentné práve vtedy, keď sú realizáciou tej istej boolovskej funkcie.

Veta

- *Ku každej boolovskej funkcii existuje formula, ktorá ju realizuje.*
- *Každú nenulovú boolovskú funkciu možno realizovať formulou* α*v úplnom disjunktívnom normálnom tvare.*
- *Každú boolovskú funkciu, ktorá nie je identicky rovná 1, možno realizovať formulou* β *v úplnom konjunktívnom normálnom tvare.*

Príklad

Nájdite formulu α v úplnom DNT a formulu β v úplnom KNT, ktoré sú realizáciou boolovskej funkcie troch premenných $f(x, y, z)$, ktorá nadobúda hodnotu 0 v argumentoch 001, 110, 101, 100.

Riešenie.

x	y	z	$f(x,y,z)$	elem. konjunkcia	elem. disjunkcia
0	0	0	1	$\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$	
0	0	1	0		$x \vee y \vee \overline{z}$
0	1	0	1	$\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}$	
0	1	1	1	$\overline{x} \wedge y \wedge z$	
1	0	0	0		$\overline{x} \vee y \vee z$
1	0	1	0		$\overline{x} \vee y \vee \overline{z}$
1	1	0	0		$\overline{x} \vee \overline{y} \vee z$
1	1	1	1	$x \wedge y \wedge z$	

α : $(\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$ – UDNT

β : $(x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)$ – UKNT

Minimalizácia DNT a KNT

Príklad

Minimalizujte formuly z predchádzajúceho príkladu.

Riešenie využitím známych tautológií:

$(\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \mid\!\models\!\mid$

$\mid\!\models\!\mid [(\overline{x} \wedge \overline{z}) \wedge (\overline{y} \vee y)] \vee [(y \wedge z) \wedge (\overline{x} \vee x)] \mid\!\models\!\mid (\overline{x} \wedge \overline{z}) \vee (y \wedge z)$ – **MDT**

$(x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \mid\!\models\!\mid$

$\mid\!\models\!\mid [(y \vee \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{x})] \wedge [(\overline{x} \vee z) \vee (z \wedge \overline{z})] \mid\!\models\!\mid (y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee z)$ – **MKT**

Riešenie pomocou Karnaughovej mapy:

		y	y, z	z
	000: 1	010: 1	011: 1	001: 0
x	100: 0	110: 0	111: 1	101: 0

		y	y, z	z
	1	1	1	0
x	0	0	1	0

Príklad

Nájdite minimálny konjunktívny tvar a minimálny disjunktívny tvar boolovskej funkcie $f(p, q, r)$, ktorá má úplný DNT

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r).$$

Riešenie. Z úplného DNT vyplýva, že funkcia $f(p, q, r)$ nadobúda hodnotu 1 len v argumentoch 111 a 001. Zapíšeme hodnoty $f(p, q, r)$ do Karnaughovej mapy.

		q	q, r	r
	0	0	0	1
p	0	0	1	0

		q	q, r	r
	0	0	0	$\boxed{1}$
p	0	0	$\boxed{1}$	0

Keďže jednotky nevieme združiť, úplný DNT je súčasne minimálny disjunktívny tvar.

Minimálny konjunktívny tvar je $(\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q}) \wedge r$.

Príklad

Nájdime minimálny disjunktívny tvar a minimálny konjunktívny tvar boolovskej funkcie štyroch premenných $f(p, q, r, s)$, ktorá nadobúda hodnotu 0 iba v argumentoch 0010, 1000, 1010, 1001, 1100, 1101, 1011.

Riešenie.

$pq \backslash rs$	00	10	11	01
00	1	0	1	1
10	0	0	0	0
11	0	1	1	0
01	1	1	1	1

$pq \backslash rs$	00	10	11	01
00	1	0	1	1
10	0	0	0	0
11	0	1	1	0
01	1	1	1	1

Minimálny konjunktívny tvar je $(\overline{p} \vee q) \ \wedge \ (q \vee \overline{r} \vee s) \ \wedge \ (\overline{p} \vee r)$.
Minimálny disjunktívny tvar je $(\overline{p} \wedge \overline{r}) \ \vee \ (q \wedge r) \ \vee \ (\overline{p} \wedge s)$.

Príklad

Nájdime minimálny disjunktívny tvar boolovskej funkcie piatich premenných $f(p,q,r,s,t)$, ktorá nadobúda hodnotu 0 iba v argumentoch (0,0,0,1,0), (1,0,1,1,0), (1,1,1,1,0), (0,1,0,1,0), (0,0,0,1,1), (0,1,0,1,1), (1,0,1,1,1), (1,0,0,1,1), (1,1,1,1,1), (1,1,0,1,1).

t

$t = 0$

pq \ rs	00	10	11	01
00	1	1	1	0
10	1	1	0	1
11	1	1	0	1
01	1	1	1	0

$t = 1$

pq \ rs	00	10	11	01
00	1	1	1	0
10	1	1	0	0
11	1	1	0	0
01	1	1	1	0

MDT: $(\overline{s}) \vee (p \wedge \overline{r} \wedge \overline{t}) \vee (\overline{p} \wedge r)$.

Neorientované grafy

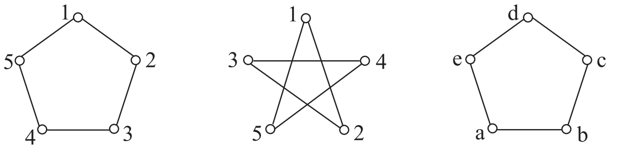
Definícia a základné typy grafov

Definícia

Graf G je usporiadaná dvojica (V, H), kde V je nejaká neprázdna množina a H je množina dvojprvkových podmnožín množiny V. Prvky množiny V nazývame vrcholy grafu G a prvky množiny H nazývame hrany grafu G. Zapisujeme $G = (V, H)$.

Graf je teda rýdzo kombinatorický objekt, ktorý dáva do vzájomných vzťahov prvky dvoch množín. Grafy budeme znázorňovať kreslením do roviny. Vrcholom grafu sa priradia body roviny a hrany sa vyjadrujú spojením príslušných dvojíc bodov rovnými alebo zakrivenými čiarami. Takému znázorneniu grafu budeme hovoriť diagram grafu.

Dva rôzne grafy môžu mať rovnaký diagram a naopak, ten istý graf sa dá znázorniť pomocou dosť nepodobných „obrázkov“.



Incidencia a susednosť v grafe

Budeme hovoriť, že hrana $\{u, v\}$ inciduje s vrcholmi u a v (v diagrame sú vrcholy u a v spojené čiarou). Dva vrcholy sa nazývajú susedné, ak incidujú s tou istou hranou, dve hrany nazývame susedné, ak incidujú s tým istým vrcholom.

Niekedy sa na riešenie problémov z praxe využívajú aj grafy s viacnásobnými hranami (v diagrame je dvojica vrcholov spojená viacerými čiarami), tzv. multigrafy, alebo grafy, v ktorých hrana (tzv. slučka) inciduje dvakrát s tým istým vrcholom. Ak graf môže obsahovať slučky aj násobné hrany, hovoríme o pseudografe.

Pre $m, n \in \mathbb{N}$ definujeme tieto **špeciálne typy grafov**:

Diskrétny graf na n vrcholoch je graf $D_n = (V, \emptyset)$, kde $|V| = n$.

Kompletný graf na n vrcholoch je graf $K_n = (V, H)$, kde $|V| = n$ a H obsahuje všetky dvojprvkové podmnožiny vrcholovej množiny (v diagrame je spojená hranou každá dvojica vrcholov).

Kompletný bipartitný graf $K_{m,n} = (V, H)$ je graf, v ktorom

$$V = \{u_1, \dots, u_m\} \cup \{v_1, \dots, v_n\}, \quad H = \{\{u_i, v_j\};\ i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Izomorfizmus grafov

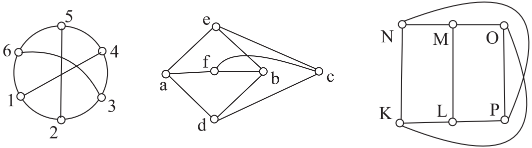
Dva grafy G a G' považujeme za rovnaké, ak majú totožné množiny vrcholov a hrán, teda $G = G'$ znamená, že $V(G) = V(G')$ a $E(G) = E(G')$. Mnoho grafov sa však líši iba označením svojich vrcholov a hrán.

Definícia

Dva grafy $G = (V, H)$ a $G' = (V', H')$ sa nazývajú izomorfné, ak existuje bijektívne zobrazenie $f : V \to V'$ také že pre všetky $u, v \in V$ platí:

$$\{u, v\} \in H \quad \text{práve vtedy, keď} \quad \{f(u), f(v)\} \in H'.$$

Zobrazenie f nazývame izomorfizmus grafov G a G'. Fakt, že grafy G a G' sú izomorfné zapisujeme $G \cong G'$.



Z definície 4.2 vyplýva, že pre dva izomomorfné grafy $G_1 = (V_1, H_1)$ a $G_2 = (V_2, H_2)$ platí $|V_1| = |V_2|, |H_1| = |H_2|$. Je zrejmé, že splnenie týchto dvoch podmienok ešte nezaručuje, že nejaké dva grafy sú izomorfné.

Podgraf a faktor grafu

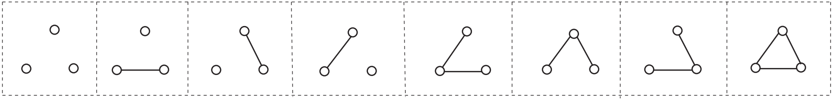
Definícia

Hovoríme, že graf G_1 je podgrafom *grafu G, ak $V(G_1) \subseteq V(G)$ a $H(G_1) \subseteq H(G)$. Zapisujeme to: $G_1 \subseteq G$.*

Definícia

Podgraf $G' = (V', H')$ grafu $G = (V, H)$ nazývame faktor *grafu G, ak $V = V'$.*

Faktor grafu je teda taký podgraf, ktorý obsahuje všetky vrcholy daného grafu. Rôzne faktory sa môžu líšiť nielen počtom hrán, ale aj rôznym zložením hranových množín. Diagramy všetkých faktorov grafu K_3:



Graf K_3 má teda 8 faktorov (vrcholy na tej istej pozícii môžeme uvažovať za rovnako označené), z nich 4 sú navzájom neizomorfné.

Stupeň vrchola v grafe

Definícia

Nech G je graf a v jeho vrchol. Symbolom $\delta_G(v)$ označme počet hrán incidujúcich s vrcholom v. Číslo $\delta_G(v)$ nazývame stupeň vrcholu v v grafe G. Ak $\delta_G(v) = 0$, vrchol v nazývame izolovaný vrchol.

Graf nemôže mať úplne ľubovoľné stupne vrcholov. Maximálny stupeň $\Delta(G)$ v grafe s n vrcholmi je $\Delta(G) \leq n - 1$ a minimálny môže byť 0 (izolovaný vrchol). Ak má graf všetky vrcholy rovnakého stupňa k, nazývame ho pravidelným grafom stupňa k. Kompletný graf K_n je pravidelným grafom stupňa $n - 1$.

Veta

Pre každý graf $G = (V, H)$ platí

$$\sum_{v \in V} \delta_G(v) = 2|H(G)|. \quad (1)$$

Dôkaz. Dôkaz urobíme matematickou indukciou vzhľadom na počet hrán grafu.
1. Ak $|H(G)| = 1$, tak graf má 1 hranu a teda 2 vrcholy stupňa 1. Teda $\sum_{v \in V} \delta_G(v) = 2 = 2|H(G)|$.
2. Ukážeme, že ak vzťah (1) platí pre graf s m hranami, potom platí aj pre graf s $m+1$ hranami. Nech G je graf s $m+1$ hranami. Odobratím ľubovoľnej hrany h z G dostávame graf G' s m hranami, pre ktorý platí $\sum_{v \in V(G')} \delta_{G'}(v) = 2m$. Vrcholy grafov G, G' majú rovnaké stupne vrcholov s výnimkou krajných vrcholov hrany h, ktoré majú v G stupne o 1 väčšie ako v G'. Dostávame

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = \sum_{v \in V(G')} \delta_{G'}(v) + 2 = 2 \cdot m + 2 = 2 \cdot (m+1) = 2 \cdot |H(G)|. \qquad \square$$

Dôsledok

Počet vrcholov s nepárnym stupňom je v každom grafe číslo párne. Špeciálne, ak k je nepárne, tak pravidelný graf stupňa k musí mať párny počet vrcholov.

Grafová postupnosť

Definícia

Konečná postupnosť nezáporných čísel $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *je grafová, ak je možné zostrojiť graf* G *s* n *vrcholmi, v ktorom sú stupne vrcholov rovné číslam v tejto postupnosti.*

Veta

Nech pre postupnosť nezáporných čísel $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *platí* $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \cdots \geq s_n$, *kde* $1 \leq s_1 \leq n-1$. *Postupnosť* $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *je grafová práve vtedy, keď je grafová postupnosť*

$$s_2 - 1,\ s_3 - 1, \ldots, s_{s_1+1} - 1,\ s_{s_1+2}, \ldots, s_n. \tag{2}$$

Príklad

Rozhodnite, či postupnosť čísel 4,3,2,3,5,2,4,1 je grafová.

5	4	4	3	3	2	2	1
	3	3	2	2	1	2	1
	3	3	2	2	2	1	1
		2	1	1	2	1	1
		2	2	1	1	1	1

Definícia

Sledom dĺžky n medzi vrcholmi u a v v grafe $G = (V, H)$ nazývame postupnosť vrcholov a hrán

$$v_0, h_1, v_1, h_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, h_n, v_n\,,$$

kde $v_i \in V$ pre $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, pričom $v_0 = u$, $v_n = v$ a $h_{i+1} = \{v_i, v_{i+1}\}$ pre $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Ak $u = v$, tak sled je uzavretý. Ak $u \neq v$, tak sled je otvorený.

Pre sled nepožadujeme, aby vrcholy a hrany boli rôzne.
Ťah je sled, v ktorom sú všetky hrany rôzne.
Cesta je sled, v ktorom sú všetky vrcholy a hrany rôzne. Dĺžka cesty je počet jej hrán. Cestu dĺžky *n*označujeme P_n.
Kružnica je uzavretá cesta dĺžky aspoň 3. Kružnica C_n dĺžky n má práve n vrcholov.

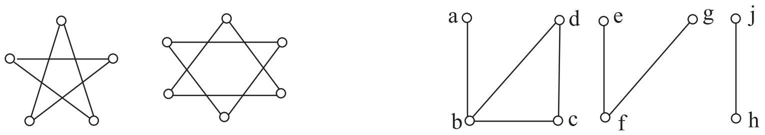
Definícia

Hovoríme, že graf G je súvislý, ak pre každé dva jeho vrcholy u a v existuje v ňom cesta z u do v. Graf, ktorý nie je súvislý, sa nazýva nesúvislý.

Komponent grafu

Definícia

Komponent grafu je každý jeho maximálny súvislý podgraf (t.j. taký súvislý podgraf, že po pridaní ľubovoľnej hrany vznikne nesúvislý graf).



(a) (b) (c)

Na obr. (a) je príklad súvislého grafu, pričom na obr. (b) je príklad nesúvislého grafu s 2 komponentmi. Na obr. (c) je nesúvislý graf s tromi komponentmi. Súvislý graf má iba jeden komponent.

Veta

Nech $G = (V, H)$, $|V| = n$, je graf, v ktorom súčet stupňov ľubovoľnej dvojice nesusedných vrcholov je aspoň $n - 1$. Potom graf G je súvislý.

Dôkaz. Vetu dokážeme sporom. Predpokladajme, že G je nesúvislý, teda obsahuje aspoň dva komponenty G_1 a G_2. Nech $|V_{G_1}| = m$ a $|V_{G_2}| = k$, $m + k \leq n$. Pre ľubovoľné dva vrcholy $u \in G_1, \ v \in G_2$ (teda nesusedné vrcholy) platí $\delta(u) \leq m - 1$, $\delta(v) \leq k - 1$. Potom

$$\delta(u) + \delta(v) \leq (m-1) + (k-1) = (m+k) - 2 \leq n - 2,$$

čo je spor s predpokladom, že súčet stupňov ľubovoľnej dvojice nesusedných vrcholov je aspoň $n - 1$. $\square$

Artikulácia je vrchol grafu, ktorý ak z grafu vynecháme (aj hrany, ktoré s ním incidujú), poruší sa súvislosť grafu (v nesúvislom grafe sa zväčší počet komponentov). Hranu, ktorej vynechanie z grafu má za následok porušenie súvislosti grafu, sa nazýva most.

Veta

Nech $G = (V, H)$, $|V| \geq 2$, je súvislý graf. Potom v grafe G existujú aspoň dva vrcholy také, že vynechaním ľubovoľného z nich sa súvislosť neporuší.

Veta

Nech $G = (V, H)$ *je konečný súvislý graf. Potom platí*

$$|V| - 1 \leq |H| \leq \frac{|V| \cdot (|V| - 1)}{2}.$$

Dôkaz. Počet hrán v grafe je zhora ohraničený počtom dvojprvkových množín z $|V|$ prvkov, ktorý je rovný $\binom{|V|}{2} = \frac{|V| \cdot (|V|-1)}{2}$. Teda platí pravá nerovnosť.
Ľavú nerovnosť dokážeme matematickou indukciou vzhľadom k počtu vrcholov.
1. Pre $|V| = 1$ tvrdenie platí, keďže $|H| = 0 = |V| - 1$.
2. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre ľubovoľný súvislý graf s n vrcholmi. Nech $G = (V, H)$ je súvislý graf s $n + 1$ vrcholmi. Podľa predchádzajúcej vety existuje v grafe G vrchol v, vynechaním ktorého vznikne súvislý graf $G' = (V', H')$ s n vrcholmi.
Z indukčného predpokladu $|H'| \geq |V'| - 1$ dostávame

$$|H| = |H'| + \delta(v) \geq |V'| - 1 + \delta(v) = |V| - 1 + \delta(v) - 1 \geq |V| - 1,$$

lebo $\delta(v) \geq 1$. Teda $|H| \geq |V| - 1$. □

Definícia

Nech $G = (V, H)$ *je súvislý graf. Vzdialenosť* $d(u, v)$ *vrcholov* u, v *grafu* G *je dĺžka najkratšej cesty spájajúcej vrcholy* u *a* v.

Definícia

Nech $G = (V, H)$ *je súvislý graf.*
Excentricita vrcholu $u \in V$ *je číslo* $e(u, G) = \max_{v \in V} d(u, v)$.
Priemer grafu G *je číslo* $P(G) = \max_{v \in V} e(v, G)$.
Polomer grafu G *je číslo* $r(G) = \min_{v \in V} e(v, G)$.
Stred grafu G *je množina vrcholov, ktorých excentricita je rovná polomeru.*

Veta

Nech $G = (V, H)$ *je súvislý graf. Potom platí*

$$r(G) \leq P(G) \leq 2r(G).$$

Maticové reprezentácie grafov

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a $H = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$.
Maticou incidencie grafu G nazývame maticu $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ typu (n, m), ak pre jej prvky platí

$$a_{ij} = \begin{cases} 1\,, & \text{ak hrana } h_j \text{ je incidentná s vrcholom } v_i\,, \\ 0\,, & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

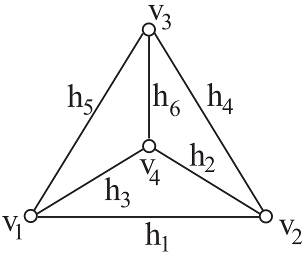
Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf s vrcholovou množinou $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.
Matica susednosti grafu G je štvorcová matica $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ rádu n, ak pre jej prvky platí

$$b_{ij} = \begin{cases} 1\,, & \text{ak } \{v_i, v_j\} \in H, \\ 0\,, & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

Príklad

Napíšte maticu incidencie a maticu susednosti zobrazeného grafu.



$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{cccccc} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 \end{array}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c|cccccc} & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Vlastnosti matíc $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$:

- Každý stĺpec matice $\boldsymbol{A}$ obsahuje práve dve jednotky.
- Riadok matice $\boldsymbol{A}$ odpovedajúci vrcholu v_i obsahuje práve $\delta(v_i)$ jednotiek.
- Matica $\boldsymbol{B}$ je symetrická a na jej hlavnej diagonále sú nuly.
- Riadok (stĺpec) matice $\boldsymbol{B}$ odpovedajúci vrcholu v_i obsahuje práve $\delta(v_i)$ jednotiek.

Nech $\boldsymbol{B}$ je matica susednosti grafu $G = (V, H)$, $|V| = n$. Označme $\boldsymbol{B}^{(1)}$ maticu, ktorú dostaneme z matice $\boldsymbol{B}$ pridaním jednotiek na hlavnú diagonálu. Uvažujme maticu $\boldsymbol{B}^{(2)} = (b_{ij}^{(2)})$ takú, že $\boldsymbol{B}^{(2)} = \boldsymbol{B}^{(1)} \cdot \boldsymbol{B}^{(1)}$. Z násobenia matíc je zrejmé, že

$$b_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}^{(1)} \cdot b_{kj}^{(1)} \,,$$

pričom ale v tomto súčine matíc budeme používať tzv. boolovské sčítavanie a násobenie

$(1 \cdot 1 = 1, \quad 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0, \quad 1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1, \quad 0 + 0 = 0)$.

Všeobecne môžeme uvažovať maticu

$$\boldsymbol{B}^{(m)} = \boldsymbol{B}^{(m-1)} \cdot \boldsymbol{B}^{(1)} \,.$$

Veta

Majme maticu susednosti $\boldsymbol{B}$ súvislého grafu $G = (V, H)$, $|V| = n$. Potom pre ľubovoľné k, $k = 1, 2, \ldots, n$, je prvok $b_{ij}^{(k)}$ matice $\boldsymbol{B}^{(k)}$ rovný jednej práve vtedy, ak $d(v_i, v_j) \leq k$.

Dôsledok

Nech $G = (V, H)$, $|V| = n$.

- *G je súvislý práve vtedy, keď prvky matice* $\boldsymbol{B}^{(n-1)}$ *sú iba jednotky.*
- *Pre každé dva rôzne vrcholy grafu* $G = (V, H)$ *platí*

$$d(v_i, v_j) = \min\{k;\ b_{ij}^{(k)} = 1\}\,.$$

Veta

Nech $\boldsymbol{A}$ je matica incidencie, $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ je k nej transponovaná matica a $\boldsymbol{B}$ je matica susednosti grafu $G = (V, H)$. Nech $\boldsymbol{D} = (d_{ij})$ je diagonálna matica s prvkami $d_{ii} = \delta(v_i)$. Potom

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\,.$$

Príklad

Nájdite všetky dvojice vrcholov, ktorých vzdialenosť je presne 3 a všetky dvojice vrcholov, ktorých vzdialenosť je viac ako 3 v grafe zadanom maticou susednosti

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Pridaním jednotiek na hlavnú diagonálu dostaneme maticu $\boldsymbol{B}^{(1)}$. Maticu $\mathbf{B}^{(2)}$ získame násobením $\boldsymbol{B}^{(1)} \cdot \mathbf{B}^{(1)}$ a maticu $\boldsymbol{B}^{(3)}$ násobením $\boldsymbol{B}^{(2)} \cdot \boldsymbol{B}^{(1)}$. Postupne teda dostávame:

$$\boldsymbol{B}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

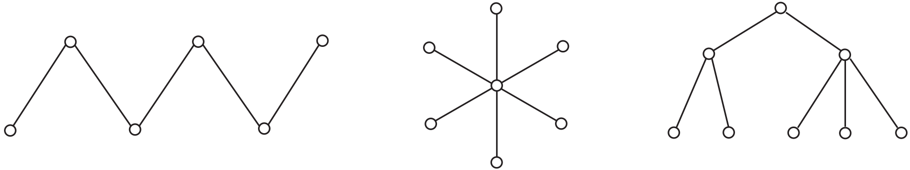
Dostávame:

$d(v_1, v_5) = 3,\ d(v_1, v_6) = 3,\ d(v_3, v_4) = 3,\ d(v_1, v_3) > 3.$

Definícia

Strom je neprázdny súvislý graf, ktorý neobsahuje kružnice. **Les** je graf, ktorého komponenty sú stromy.

Na označenie stromov budeme používať označenie $T = (V, H)$.
Je zrejmé, že každý súvislý podgraf stromu je tiež strom že každý nesúvislý podgraf stromu je les.



had hviezda rozhodovací strom

Veta

Nech $T = (V, H)$ je strom a $|H| \geq 1$. Potom v T existujú aspoň dva rôzne vrcholy, ktoré majú stupeň rovný číslu 1.

Dôkaz. Dĺžka každej cesty v T je maximálne rovná číslu $|H|$. Vezmime cestu maximálnej dĺžky, označme ju P_m a jej dĺžku $d_m \leq |H|$. Nech P_m má krajné vrcholy x, y. Dokážeme, že vrcholy x, y majú stupeň 1.

Dôkaz urobíme sporom.
Predpokladajme, že $\delta(x) = 2$. Potom existuje hrana $h = \{w, x\}$, ktorá nepatrí do P_m. Vrchol w nepatrí do P_m, lebo by T obsahoval kružnicu. Cestu (w, h, x) označme P_1 a zostrojme cestu $P_1 P_m$. Jej dĺžka je $d_m + 1$, čo je spor s predpokladom, že P_m je cesta maximálnej dĺžky. Teda $\delta(x) = 1$.
Podobne dokážeme, že $\delta(y) = 1$. □

Veta

Nech $T = (V, H)$ je strom. Potom

$$|H| = |V| - 1\,. \tag{3}$$

Dôkaz. Dôkaz urobíme matematickou indukciou vzhľadom na počet vrcholov.
1. Ak $|V| = 1$, tak graf neobsahuje žiadnu hranu, teda $|H| = |V| - 1 = 0$.
2. Ukážeme, že ak vzťah (3) platí pre graf s n vrcholmi, potom platí aj pre graf s $n+1$ vrcholmi. Nech $T = (V, H)$ je strom s $n+1$ vrcholmi. Podľa predchádzajúcej vety v T existuje vrchol x taký, že $\delta(x) = 1$. Ak odstránime z T vrchol x, dostaneme strom $T' = (V', H')$ s n vrcholmi.
Podľa indukčného predpokladu platí $|H'| = |V'| - 1$. Keďže $|V| = |V'| + 1$ a $|H| = |H'| + 1$, dostávame

$$|H| = |H'| + 1 = |V'| - 1 + 1 = |V'| = |V| - 1.$$

Veta

Súvislý graf je stromom práve vtedy, ak medzi každou dvojicou jeho vrcholov existuje práve jedna cesta.

Polomer a priemer stromu

Veta

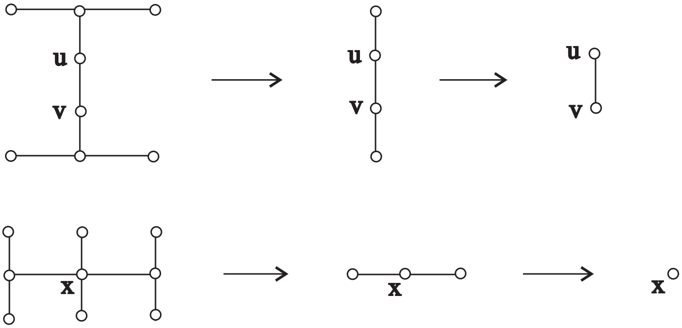
Nech $T = (V, H)$ je strom. Ak jeho priemer je číslo párne, tak stredom stromu je jediný vrchol a $P(T) = 2r(T)$. Ak jeho priemer je číslo nepárne, tak stredom sú dva susedné vrcholy a $P(T) = 2r(T) - 1$.

Postup pri hľadaní stredu stromu:

Vynecháme všetky vrcholy stupňa 1 (aj s hranami, ktoré s nimi incidujú). Dostaneme opäť strom a proces opakujeme. Máme dve možnosti:
1. Na konci dostaneme jedinú hranu, vtedy stred pozostáva z dvoch vrcholov. Polomer $r(T)$ je o jednotku väčší ako počet iterácií (odobratí vrcholov stupňa 1).
2. Dostaneme jediný vrchol, ktorý je stredom. Polomer $r(T)$ je rovný počtu iterácií.

Príklad

Nájdeme stred, polomer a priemer stromov T_1, T_2.



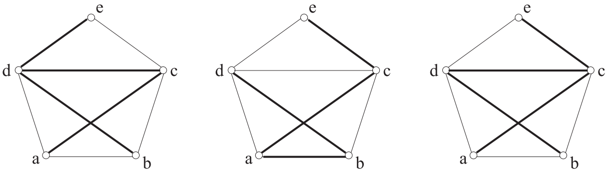
Stred stromu T_1 pozostáva z vrcholov u, v. Polomer je $r(T_1) = 3$, priemer je $P(T_1) = 5 = 2 \cdot r(T) - 1$.
Stred stromu T_2 pozostáva z vrcholu x. Polomer je $r(T_2) = 2$, priemer je $P(T_2) = 4 = 2 \cdot r(T_2)$.

Kostry a kružnice

Definícia

Kostra grafu $G = (V, H)$ je taký jeho faktor, ktorý je stromom.

Kostru môžeme charakterizovať aj ako súvislý podgraf daného grafu, ktorý obsahuje všetky jeho vrcholy a neobsahuje kružnicu. Je zrejmé, že v grafe G existuje kostra práve vtedy, ak je graf G súvislý. Ak je graf G strom, potom v ňom existuje jediná kostra, ktorou je práve graf G.



Veta

V grafe $G = (V, H)$ existuje kostra práve vtedy, keď G je súvislý graf. Potom T je kostra grafu G.

Dôkaz.
1. Nech v G existuje kostra. Potom G je súvislý, lebo kostra je súvislý graf, ktorý je podgrafom G.
2. Nech G je súvislý graf. Ak G je strom, potom sa G rovná svojej kostre. Ak G nie je strom, potom obsahuje kružnicu. Vynechaním ľubovoľnej hrany kružnice vznikne súvislý podgraf. Ak neobsahuje kružnicu, je to kostra. Ak áno, pokračujeme rovnako, až kým nedostaneme faktor grafu, ktorý je stromom.

Veta

Nech $G = (V, H)$ je súvislý graf a T je jeho podgraf s $|V| - 1$ hranami neobsahujúci kružnice. Potom T je kostra grafu G.

Definícia

Nech $G = (V, H)$ *je súvislý graf a* $T = (V, H(T))$ *je nejaká kostra grafu* G*. Hrany kostry* T *nazývame* *vetvy* *a ostatné hrany nazývame* *tetivy* *grafu* G *vzhľadom na kostru* T*.*

Veta

Nech $G = (V, H)$ *je súvislý graf,* $T = (V, H(T))$ *je nejaká kostra grafu* G *a* h *je ľubovoľná tetiva grafu* G *vzhľadom na kostru* T*. Potom graf* $T + h$ *obsahuje práve jednu kružnicu.*

Definícia

Nech $H_t = \{h_1, h_2, \ldots, h_{|H|-|V|+1}\}$ *je množina tetív súvislého grafu* $G = (V, H)$ *vzhľadom na kostru* T*. Označme* C_i *kružnicu, ktorá vznikne pridaním tetivy* h_i *ku kostre* T*. Systém kružníc* $\{C_1, C_2, \ldots, C_{|H|-|V|+1}\}$ *nazývame* *fundamentálny systém kružníc* *grafu* G *vzhľadom na kostru* T*.*

Počet kostier grafu

Veta (Cayley, 1889)

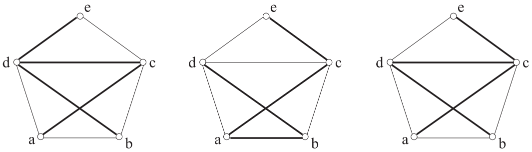
Počet všetkých rôznych kostier kompletného grafu K_n pre $n \geq 2$ je rovný číslu n^{n-2}.

Nech $G = (V, H)$, $|V| = n$, je súvislý graf. Nech $\boldsymbol{B}$ je matica susednosti a $\boldsymbol{D}$ je diagonálna matica s prvkami $d_{ii} = \delta(v_i)$ grafu G. Označme $\boldsymbol{D}_i - \mathbf{B}_i$ maticu rádu $n-1$, ktorú sme vytvorili z matice $\boldsymbol{D} - \boldsymbol{B}$ vynechaním i–tého riadku a i–tého stĺpca pre ľubovoľné $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Potom pre počet $p(T)$ všetkých rôznych kostier grafu G platí

$$p(T) = \det(\boldsymbol{D}_i - \boldsymbol{B}_i)\,.$$

Príklad

Vypočítajme počet rôznych kostier grafu na obrázku.



Riešenie. Najprv napíšeme matice

$$\boldsymbol{B} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}_3 - \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a $\det(\boldsymbol{D}_3 - \boldsymbol{B}_3) = 40$. Teda počet kostier grafu je $p(T) = 40$. Je zrejmé, že niektoré z kostier sú navzájom izomorfné.

Farbenie vrcholov grafu

Definícia

Farbenie vrcholov grafu nazývame regulárne, ak vrcholy incidentné s tou istou hranou (susedné vrcholy) majú rôzne farby.

Definícia

Grafu $G = (V, H)$ je k-chromatický, ak na jeho regulárne zafarbenie stačí k farieb. Chromatické číslo $\chi(G)$ grafu G je najmenšie číslo k také, že graf G je k-chromatický.

Platí: $\chi(K_n) = n, \quad \chi(D_n) = 1.$

Veta

Každý strom s aspoň jednou hranou má chromatické číslo dva, teda $\chi(T) = 2$.

Veta

Nech $n \geq 2$. Označme C_{2n} kružnicu dĺžky $2n$ a C_{2n-1} kružnicu dĺžky $2n-1$. Potom $\chi(C_{2n}) = 2$ a $\chi(C_{2n-1}) = 3$.

Veta

Graf $G = (V, H)$, $H \neq \emptyset$ má chromatické číslo dva práve vtedy, keď neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.

Definícia

Graf $G = (V, H)$, $H \neq \emptyset$ sa nazýva bichromatický, resp. bipartitný, ak má chromatické číslo dva.

V bipartitnom grafe sa zafarbením vrcholov rozloží vrcholová množina na dve množiny V_1, V_2, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$ také, že každá hrana má jeden krajný vrchol v množine V_1 a druhý krajný vrchol v množine V_2. Bipartitný graf s maximálnym počtom vrcholov je kompletný bipartitný graf a pre $V_1 = m$, $V_2 = n$ ho označujeme $K_{m,n}$.

Farbenie hrán

Definícia

Farbenie hrán grafu nazývame regulárne, ak žiaden vrchol neinciduje s dvoma alebo viacerými hranami rovnakej farby.

Definícia

Chromatický index $\overline{\chi}(G)$ grafu G je číslo k, ktoré je rovné najmenšiemu počtu farieb, potrebných na regulárne zafarbenie hrán grafu.

Veta

Nech m je maximum stupňov vrcholov grafu $G = (V, H)$. Potom platí:

$$\chi(G) \leq m + 1, \qquad m \leq \overline{\chi}(G) \leq m + 1.$$

Eulerovské grafy

Pojmy a vlastnosti, ktoré si uvedieme v tomto paragrafe, sa využívajú pri riešeniach praktických úloh za pomoci teórie grafov.
Jednou zo základných (a najstarších) úloh týkajúcich sa grafov je nasledujúca otázka: *Dá sa nakresliť diagram daného grafu $G = (V, H)$ jedným uzavretým ťahom bez zdvihnutia ceruzky z papiera tak, aby sme po žiadnej hrane neprechádzali viackrát?*
Matematicky môžeme úlohu sformulovať takto: Dá sa v grafe nájsť uzavretý sled, v ktorom sa každá hrana vyskytuje práve raz?

Definícia

Uzavretý eulerovským ťah je uzavretý sled, v ktorom sa každá hrana vyskytuje práve raz.

Definícia

Graf je eulerovský práve vtedy, keď sa dá pokryť uzavretým eulerovským ťahom.

Veta (Charakteristika eulerovských grafov)

Graf je eulerovský práve vtedy, ak je súvislý a každý jeho vrchol má párny stupeň.

Veta

Graf G môžeme pokryť jedným otvoreným ťahom práve vtedy, ak je súvislý s práve dvomi vrcholmi nepárneho stupňa.

Veta

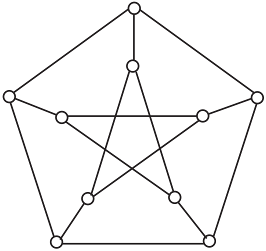
Graf G môžeme pokryť p otvorenými ťahmi práve vtedy, ak je súvislý s $2p$ vrcholmi nepárneho stupňa.

Pri hľadaní uzavretého eulerovského ťahu začneme v ľubovoľnom vrchole a po hrane s ním incidentnej prejdeme do nejakého susedného vrcholu. Použitú hranu z grafu odoberieme a postupujeme rovnakým spôsobom ďalej až sa nakoniec vrátime do vrcholu, v ktorom sme začínali. Výber hrany je viazaný iba podmienkou, aby jej vypustením nevznikol nesúvislý graf (izolované vrcholy pripúšťame, ale štartovací vrchol sa stane izolovaným až v poslednom kroku). Pri hľadaní otvoreného ťahu v grafe s dvomi vrcholmi nepárneho stupňa začneme aj skončíme vo vrchole nepárneho stupňa.

Definícia

Hamiltonovská kružnica v grafe G je kružnica obsahujúca všetky vrcholy grafu G. Graf nazývame hamiltonovský, ak obsahuje aspoň jednu hamiltonovskú kružnicu.

Aby bol graf hamiltonovský, musí byť konečný, súvislý, musí obsahovať aspoň jeden vrchol a nesmie obsahovať mosty ani artikulácie. Avšak ani splnenie uvedených podmienok nezaručuje existenciu hamiltonovskej kružnice. Napríklad Petersenov graf nie je hamiltonovský.



Petersenov graf

Problém existencie hamiltonovskej kružnice je mimoriadne náročný a doteraz nepoznáme žiadnu jednoduchú charakteristiku hamiltonovských grafov. Tejto problematike sa venuje veľké množstvo matematikov a dosiahli obrovské množstvo čiastočných výsledkov, nie však nutnú a postačujúcu podmienku existencie hamiltonovskej kružnice.

Postačujúce podmienky pre hamiltonovské grafy

Nasledujúce vety predstavujú postačujúce, avšak nie nutné podmienky pre hamiltonovské grafy.

Veta

Nech $G = (V, H)$ je graf, $|V| = n$, $n \geq 3$. Ak stupeň každého vrcholu grafu je aspoň $\frac{n}{2}$, tak G je hamiltonovský graf.

Veta

Ak pre ľubovoľné dva nesusedné vrcholy u, v grafu $G = (V, H)$, $|V| = n$, $n \geq 3$, platí

$$\delta(u) + \delta(v) \geq n\,,$$

tak graf G je hamiltonovský.

Veta

Nech $G = (V, H)$ je graf, $|V| = n$, $n \geq 3$. Nech pre každé celé číslo j, $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$ je počet vrcholov stupňa najviac n menší ako j. Potom graf G je hamiltonovský.

Veta

Nech $G = (V, H)$ je graf, $|V| = n$, $n \geq 3$ a G je bipartitný graf ($\chi(G) = 2$). Nech V_i je množina vrcholov i-tej farby, $i = 1, 2$. Ak $|V_1| \neq |V_2|$, tak G nie je hamiltonovský.

Špeciálne, bipartitný graf s nepárnym počtom vrcholov nikdy nie je hamiltonovský.

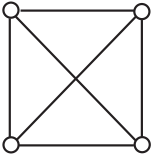
Veta

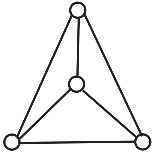
Nech $G = (V, H)$ je graf, $|V| = n$, $n \geq 3$. Nech $V' = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $k < n$, pričom platí, že vynechaním všetkých vrcholov z V' vznikne nesúvislý graf s aspoň $k + 1$ komponentmi. Potom graf G nie je hamiltonovský.

Planárne grafy

Definícia

Graf $G = (V, H)$ je planárny (rovinný), ak jeho diagram v rovine môžeme zostrojiť tak, že dve rôzne hrany majú spoločné nanajvýš krajné vrcholy. Ak G nie je planárny, tak ho nazývame neplanárny.





V prípade planárneho grafu ide teda o „možnosť“ nakresliť jeho diagram požadovaným spôsobom. Planárny je napríklad graf K_4, ktorého dva diagramy sú na obrázku, hoci v jednom z nich sa hrany pretínajú. Diagram bez pretínania hrán rozdeľuje rovinu na disjunktné oblasti (ak obsahuje aspoň jednu kružnicu) a tie budeme nazývať oblasťami planárneho grafu. Neohraničenú oblasť nazývame vonkajšia.

Eulerova veta

Veta (Eulerova veta o planárnych grafoch)

Nech $G = (V, H)$ je súvislý planárny graf. Nech r je počet oblastí grafu G. Potom platí

$$|H| - |V| + 2 = r\,. \tag{4}$$

Dôkaz. Dôkaz urobíme matematickou indukciou vzhľadom na počet oblastí r.

1. Pre $r = 1$ graf neobsahuje kružnicu, teda je to strom a preto $H = |V| - 1$. Odtiaľ

$$|H| - |V| + 2 = |V| - 1 - |V| + 2 = 1 = r\,.$$

2. Nech (4) platí pre všetky grafy, ktoré majú r oblastí. Nech $G' = (V', H')$ má $r' = r + 1$ oblastí a označme vonkajšiu oblasť σ. Vyberme oblasť, ktorá susedí so σ a označme ju σ_1. Nech hranica medzi σ a σ_1 je cesta (kružnica) P. Vynechajme z G' hranu cesty P. Dostaneme graf $G = (V, H)$, pre ktorý platí $|V'| = |V|$, $|H| = |H|' - 1$ a $r' - 1 = r$. Keďže pre G platí Eulerova veta, dostávame

$$|H'| - |V'| + 2 = |H| + 1 - |V| + 2 = (|H| - |V| + 2) + 1 = r + 1 = r'\,.$$

Veta

Ak je každá oblasť planárneho grafu $G = (V, H)$ ohraničená kružnicou, ktorá má k hrán, potom platí

$$|H| = k \cdot \frac{|V| - 2}{k - 2} \cdot \tag{5}$$

Dôkaz. Každá hrana je obsiahnutá v hranici dvoch oblastí. Pre planárny graf s r oblasťami teda platí $k \cdot r = 2|H|$. Po dosadení za r z Eulerovej vety dostávame

$$k \cdot (|H| - |V| + 2) = 2|H| \Rightarrow k \cdot |H| - k|V| + 2k = 2|H| \Rightarrow$$

$$|H|(k - 2) = k(|V| - 2) \Rightarrow |H| = k \cdot \frac{|V| - 2}{k - 2}.$$

Veta

Ak $G = (V, H)$ je súvislý planárny graf, tak $|H| \leq 3|V| - 6$.

Dôkaz. Uvažujme maximálny planárny graf, teda graf, v ktorom sa pridaním ľubovoľnej hrany poruší planarita. V takomto grafe sú všetky oblasti ohraničené kružnicou dĺžky 3, (tzv. trojuholníkom). Po dosadení $k = 3$ do vzťahu (5) dostávame $|H| = 3(|V| - 2) = 3|V| - 6$. Keďže G nemusí nutne byť maximálny planárny graf, platí nerovnosť $|H| \leq 3|V| - 6$.

Dôsledok

1. *Každý planárny graf obsahuje aspoň jeden vrchol, ktorého stupeň je menší ako šesť.*
2. *Graf K_5 je neplanárny.*

Veta

Ak $G = (V, H)$ je súvislý planárny graf bez trojuholníkov, tak $|H| \leq 2|V| - 4$.

Dôsledok

Graf $K_{3,3}$ je neplanárny.

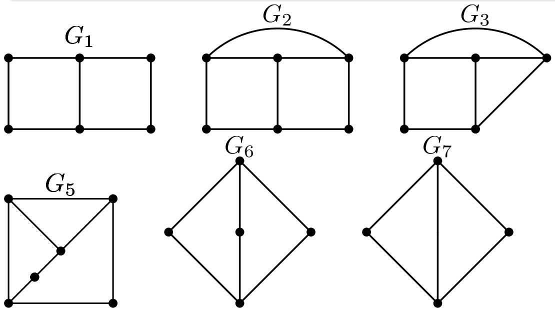
Grafy K_5 a $K_{3,3}$ predstavujú najmenšie neplanárne grafy. K_5 má najmenší počet vrcholov a $K_{3,3}$ najmenší počet hrán zo všetkých neplanárnych grafov. Tieto dva grafy hrajú veľmi dôležitú úlohu pri charakterizácii planárnych grafov.

Homeomorfné grafy

Uvažujme graf $G = (V, H)$ s aspoň jednou hranou. Ak z neho vynecháme hranu $\{u, v\}$ a nahradíme ju dvoma novými hranami $\{u, z\}$ a $\{z, v\}$, povieme, že nový graf vznikol rozpolením hrany.

Definícia

Dva grafy nazývame homeomorfné, ak sú izomorfné, alebo vznikli postupným rozpoľovaním hrán (aspoň u jedného z nich) z toho istého grafu.



Grafy G_1, G_6, G_7 sú homeomorfné.

Grafy G_2, G_3, G_5 sú homeomorfné.

Veta (Kuratowského veta)

Graf G je planárny práve vtedy, ak neobsahuje podgraf homeomorfný s grafom K_5 ani s grafom $K_{3,3}$.

Príklad

V Petersenovom grafe nájdite podgraf homeomorfný s grafom $K_{3,3}$.

Digrafy

Definícia digrafu

Definícia

Nech $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *a nech* $H \subset (V \times V) \setminus \{(v_1, v_1), (v_2, v_2), \ldots, (v_n, v_n)\}$. *Digraf* $\overrightarrow{G}$ *je usporiadaná dvojica množín* $\overrightarrow{G} = (V, H)$.

Ak hrana $h = (u, v) \in H$, nazývame vrchol u začiatočným a vrchol v koncovým vrcholom orientovanej hrany h. Hrany $h_1 = (u, v)$ a $h_2 = (v, u)$ nazývame opačne orientovanými hranami. Zrušením orientácie digrafu môžeme dostať graf alebo multigraf. Naopak, orientáciou hrán grafu vždy dostaneme digraf. Ak ku každej hrane $h = \{u, v\}$ grafu $G = (V, H)$ vytvoríme dve opačne orientované hrany $h' = (u, v)$ a $h'' = (v, u)$, dostaneme symetrickú orientáciu grafu G.

Definícia

Dva digrafy $\overrightarrow{G}_1 = (V_1, H_1)$ *a* $\overrightarrow{G}_2 = (V_2, H_2)$ *sa nazývajú izomorfné, ak existuje bijektívne zobrazenie* $f : V_1 \to V_2$ *také že pre všetky* $u, v \in V$*:*

$$(u, v) \in H_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in H_2 \,.$$

Zobrazenie f *nazývame izomorfizmom digrafov* $\overrightarrow{G}_1$ *a* $\overrightarrow{G}_2$. *Zapisujeme* $\overrightarrow{G}_1 \cong \overrightarrow{G}_2$.

Stupne vrcholov

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je digraf. Označme $\delta^+(v)$, resp $\delta^-(v)$ počet hrán, ktorých vrchol v je začiatočným, resp. koncovým vrcholom. číslo $\delta^+(v)$, resp. $\delta^-(v)$ nazývame vonkajší, resp. vnútorný stupeň vrcholu v.

Pre vrcholy a hrany digrafu $\overrightarrow{G} = (V, H)$ platí

$$\sum_{v \in V} \delta^+(v) = \sum_{v \in V} \delta^-(v) = |H|.$$

Špeciálne názvy pre vrcholy digrafu.
Nech $v \in V$, potom ak:

$\delta^+(v) = \delta^-(v)$,	tak v je rovnovážny vrchol,
$\delta^+(v) > 0, \quad \delta^-(v) = 0$,	tak v je prameň,
$\delta^+(v) = 0, \quad \delta^-(v) > 0$,	tak v je ústie,
$\delta^+(v) > \delta^-(v) > 0$,	tak v je zosilňovač,
$0 < \delta^+(v) < \delta^-(v)$,	tak v je zoslabovač.

Sled v digrafe $\overrightarrow{G}$ je postupnosť vrcholov a hrán v $\overrightarrow{G}$, ktorá po zrušení orientácie je sledom v G. Dĺžka sledu je počet jeho hrán.

Spojenie v $\overrightarrow{G}$ je taký sled v $\overrightarrow{G}$, v ktorom je zachovaná orientácia hrán od začiatočného vrcholu ku koncovému.

Orientovaný ťah v $\overrightarrow{G}$ je také spojenie v $\overrightarrow{G}$, ktoré po zrušení orientácie je ťahom v G (neopakujú sa hrany).

Dráha v $\overrightarrow{G}$ je také spojenie v $\overrightarrow{G}$, ktoré po zrušení orientácie je cestou v G (neopakujú sa vrcholy). Dĺžka dráhy je rovná počtu jej hrán.

Cyklus v $\overrightarrow{G}$ je uzavretá dráha. Počet jej vrcholov (hrán) je dĺžka cyklu.

Definícia

Digraf je súvislý, ak je súvislý graf G, ktorý vznikol zrušením orientácie v $\overrightarrow{G}$.

Definícia

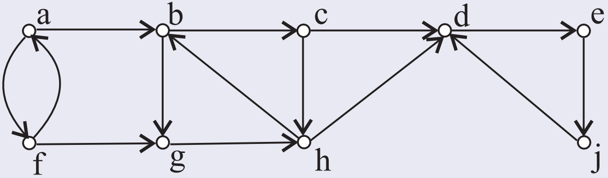
Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je súvislý digraf. Pod vzdialenosťou $\overrightarrow{d}(u, v)$ z vrcholu u do vrcholu v rozumieme dĺžku minimálnej dráhy z u do v. Ak neexistuje dráha z u do v, tak $\overrightarrow{d}(u, v) = \infty$.

Definícia

Digraf $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je silne súvislý, ak pre ľubovoľné dva vrcholy $u, v \in V$ existuje spojenie z u do v aj spojenie z v do u. Silným komponentom digrafu $\overrightarrow{G}$ nazývame každý jeho maximálny silne súvislý poddigraf.

Príklad

Zistite, či digraf na obrázku je silne súvislý. Ak nie, nájdite silne súvislé komponenty.



Digraf nie je silne súvislý. Neexistuje spojenie napríklad z vrcholu d do vrcholu b. Digraf obsahuje tri silné komponenty, a to:

$\overrightarrow{G}_1 = (V_1, H_1),\ V_1 = \{a, f\},\ H_1 = \{(a, f), (f, a)\}$

$\overrightarrow{G}_2 = (V_2, H_2),\ V_2 = \{b, c, g, h\},\ H_2 = \{(b, c), (c, h), (h, b), (g, h),\ (b, g)\},$

$\overrightarrow{G}_3 = (V_3, H_3),\ V_3 = \{d, e, j\},\ H_3 = \{(d, e), (e, j), (j, d)\}.$

Ak by sme pridali k tomuto digrafu hranu so začiatočným vrcholom v množine V_3 a koncovým v množine V_1, takto získaný digraf by bol silne súvislý.

Veta

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je súvislý digraf, v ktorom pre každý vrchol $v \in V$ platí $\delta^+(v) = 1$ alebo pre každý vrchol $v \in V$ platí $\delta^-(v) = 1$. Potom $\overrightarrow{G}$ obsahuje práve jeden cyklus.

Dôkaz. Matematickou indukciou vzhľadom na počet vrcholov.
1. Pre digraf s dvomi vrcholmi tvrdenie platí.
2. Nech tvrdenie platí pre všetky digrafy s n vrcholmi. Uvažujme digraf s $n+1$ vrcholmi. Ak $\delta^+(v) = 1$ pre všetky $v \in V$, potom

$$\sum_{v \in V} \delta^+(v) = \sum 1 = |V| = \sum_{v \in V} \delta^-(v) = |H|.$$

Budeme rozlišovať dva prípady:
(i) $\delta^-(v) = 1$ pre všetky $v \in V$. Potom $\overrightarrow{G}$ je tvorený jediným cyklom.
(ii) Ak pre nejaký vrchol $v \in V$ platí $\delta^-(v) > 1$, potom musí existovať vrchol $u \in V$ taký, že $\delta^-(u) = 0$. Ak vynecháme z $\overrightarrow{G}$ vrchol u a hranu z neho vychádzajúcu, dostaneme digraf s n vrcholmi, v ktorom podľa indukčného predpokladu existuje jediný cyklus. To sa nezmení ani po vrátení vrchola u.

Veta

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *je súvislý digraf, v ktorom pre každý vrchol* $v \in V$ *platí* $\delta^+(v) \geq 1$ *alebo pre každý vrchol* $v \in V$ *platí* $\delta^-(v) \geq 1$. *Potom* $\overrightarrow{G}$ *obsahuje aspoň jeden cyklus.*

Veta

Pre digraf $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *sú nasledujúce tri tvrdenia ekvivalentné:*

a) $\overrightarrow{G}$ *je silne súvislý.*

b) $\overrightarrow{G}$ *je súvislý a každá jeho hrana sa vyskytuje aspoň v jednom cykle.*

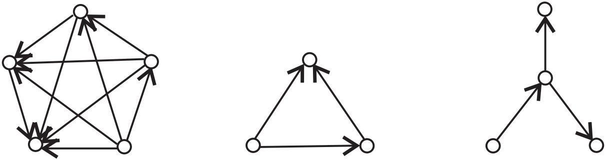
c) Pre ľubovoľný rozklad $\{V_1, V_2\}$ *vrcholovej množiny* V *existujú hrany* h_1, h_2 *také, že* h_1 *má začiatočný vrchol vo* V_1 *a koncový vo* V_2 *a* h_2 *má začiatočný vrchol vo* V_2 *a koncový vo* V_1.

Acyklické digrafy

Definícia

Digraf $\overrightarrow{G} = (V, H)$, *ktorý neobsahuje cyklus, nazývame* *acyklický digraf.*

Na obrázku sú diagramy troch acyklických digrafov $\overrightarrow{G}_1$, $\overrightarrow{G}_2$ a $\overrightarrow{G}_3$.



G_1 $\qquad$ G_2 $\qquad$ G_3

Ak $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je acyklický digraf, je zrejmé, že aj každý jeho poddigraf je acyklický.

Veta

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$, *kde* $H \neq \emptyset$, *je konečný acyklický digraf. Potom v* $\overrightarrow{G}$ *existuje aspoň jeden prameň a aspoň jedno ústie.*

Nutná a postačujúca podmienka pre acyklické digrafy

Veta

Digraf $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *je acyklickým digrafom práve vtedy, ak môžeme jeho vrcholy označiť číslami* $1, 2, \ldots, |V|$ *tak, že každá hrana* (i, j) *spĺňa podmienku* $i < j$*.*

Dôkaz.

1. Nech v digrafe môžeme jeho vrcholy označiť číslami $1, 2, \ldots, |V|$ tak, že každá hrana (i, j) spĺňa podmienku $i < j$. Nech existuje v $\overrightarrow{G}$ cyklus $i_1, i_2, \ldots, i_n, i_1$. Potom $i_1 < i_2 < \cdots < i_n < i_1$, teda $i_1 < i_1$, čo je spor. Teda $\overrightarrow{G}$ je acyklický.

2. Nech $\overrightarrow{G}$ je acyklický digraf. Potom existuje prameň, označíme ho číslom 1. Ak $|V| \neq 1$, vynecháme z $\overrightarrow{G}$ všetky hrany, ktoré sú s týmto prameňom incidentné, Dostaneme acyklický digraf, v ktorom existuje prameň, označíme ho číslom 2. Tento postup opakujeme, až dospejeme k diskrétnemu digrafu $\overrightarrow{D} = (V, \emptyset)$, ktorého vrcholy sú očíslované číslami $1, 2, \ldots, r \leq |V|$. Ak $r = |V|$, sme s očíslovaním hotoví, Ak nie, neočíslovaným vrcholom priradíme ľubovoľne čísla $r + 1, r + 2, \ldots, |V|$.

Maticová reprezentácia digrafov

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je digraf, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $H = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$. Maticou incidencie digrafu $\overrightarrow{G}$ nazývame maticu $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ typu (n, m), ak pre jej prvky platí

$$a_{ij} = \begin{cases} 1\,, & \text{ak } h_j = (v_i, v_k) \text{ pre nejaké } v_k \in V\,, \\ -1\,, & \text{ak } h_j = (v_k, v_i) \text{ pre nejaké } v_k \in V\,, \\ 0\,, & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

Základné vlastnosti matice $\boldsymbol{A}$:

a) v každom stĺpci sa čísla 1 a -1 vyskytujú práve raz, ostatné prvky sú nuly,

b) počet jednotiek v i–tom riadku je rovný $\delta^+(v_i)$,

c) počet čísel -1 v i–tom riadku je rovný $\delta^-(v_i)$.

Z matice incidencie $\boldsymbol{A}$ digrafu $\overrightarrow{G}$ ľahko dostaneme maticu incidencie multigrafu G, ktorý vznikne zrušením orientácie, a to tak, že namiesto a_{ij} zoberieme $|a_{ij}|$.

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je digraf s vrcholovou množinou $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Matica susednosti digrafu $\overrightarrow{G}$ je štvorcová matica $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ rádu n, ak pre jej prvky platí

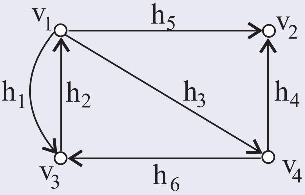
$$b_{ij} = \begin{cases} 1\,, & \text{ak } (v_i, v_j) \in H, \\ 0\,, & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

Veta

Nech $\boldsymbol{B}$ je matica susednosti digrafu $\overrightarrow{G} = (V, H)$. Potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ prvok $b_{ij}^{(n)}$ matice $\boldsymbol{B}^n$ udáva počet spojení dĺžky n z vrcholu v_i do vrcholu v_j.

Príklad

Napíšte maticu incidencie $\boldsymbol{A}$ *a maticu susednosti* $\boldsymbol{B}$ *digrafu, ktorého diagram je na obrázku.*



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Orientované stromy

Definícia

Nech $T = (V, H)$ *je strom. Ak každej hrane stromu* T *priradíme práve jednu z dvoch možných orientácií, tak dostaneme* ***orientovaný strom*** $\overrightarrow{T}$.

Je zrejmé, že k stromu $T = (V, H)$ môžeme zostrojiť práve $2^{|H|}$ orientovaných stromov $\overrightarrow{T}$ (niektoré z nich budú navzájom izomorfné).

Definícia

Nech $\overrightarrow{T_v}$ *je orientovaný strom s aspoň dvoma vrcholmi, v ktorom z vrcholu* v *existuje dráha do všetkých ostatných vrcholov. Potom* $\overrightarrow{T_v}$ *nazývame* ***koreňový strom*** *a vrchol* v *je* ***koreňom stromu***.

V terminológii digrafov koreň stromu je vlastne jediným prameňom digrafu, ktorý je koreňovým stromom. Vrcholom, ktoré v digrafe nazývame ústia, budeme v koreňových stromoch hovoriť **listy**.

Kostra digrafu

Keďže v koreňovom strome môže medzi dvoma rôznymi vrcholmi existovať najviac jedna dráha, orientácia každej hrany v koreňovom strome je jednoznačne určená výberom koreňa. Koreňový strom $\overrightarrow{T_v}$ môžeme potom v rovine reprezentovať aj diagramom neorientovaného stromu T_v, pričom koreň stromu v umiestnime najvyššie.

Definícia

Nech $\overrightarrow{G}$ je digraf, ktorý vznikol orientáciou grafu (multigrafu) G. Nech K je kostra grafu (multigrafu) G. Potom digraf $\overrightarrow{K}$, ktorý vznikol z K rovnakou orientáciou hrán, sa nazýva orientovanou kostrou digrafu $\overrightarrow{G}$. Kostra súvislého digrafu $\overrightarrow{G}$, ktorá je koreňovým stromom, sa nazýva koreňová kostra digrafu $\overrightarrow{G}$.

Ak po zrušení orientácie všetkých hrán v digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H)$ získame graf, tak počet rôznych orientovaných kostier digrafu $\overrightarrow{G}$ je rovný počtu rôznych kostier v grafe G. Iná situácia je, ak v digrafe $\overrightarrow{G}$ sú opačne orientované hrany a po zrušení orientácie získame multigraf.

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$, $|V| = n$, je súvislý digraf. Nech $\boldsymbol{A}$ je jeho matica incidencie. Potom pre počet $p(\overrightarrow{T})$ všetkých rôznych orientovaných kostier digrafu $\overrightarrow{G}$ platí

$$p(\overrightarrow{T}) = \det(\,(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})_i\,)$$

pre ľubovoľné $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pričom $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})_i$ je matica utvorená z matice $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ vynechaním i–tého riadku a i–tého stĺpca.

Spôsob určovania počtu $p(\overrightarrow{T_{v_s}})$ všetkých rôznych koreňových kostier digrafu $\overrightarrow{G} = (V, H)$ s koreňom vo vrchole v_s.

Vytvoríme maticu $\boldsymbol{K} = (k_{ij})$ rádu $|V|$ digrafu $\overrightarrow{G}$, kde

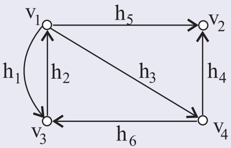
$$\begin{aligned} k_{ii} &= \delta^-(v_i), && \text{pre } i = 1, 2, \ldots, |V|, \\ k_{ij} &= -b_{ij}, && \text{pre } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots |V|, \end{aligned}$$

pričom b_{ij} sú prvky matice susednosti $\boldsymbol{B}$ digrafu $\overrightarrow{G}$. Utvorme maticu $\boldsymbol{K}_s$ vynechaním s–tého riadku a s–tého stĺpca matice $\boldsymbol{K}$. Potom platí

$$p(\overrightarrow{T_{v_s}}) = \det \boldsymbol{K}_s\,.$$

Príklad

Vypočítajte počet všetkých rôznych kostier digrafu



Riešenie. Máme

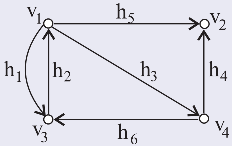
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \det(\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)_1\,) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 13.$$

Teda $p(\overrightarrow{T}) = 13$.

Príklad

Vypočítajte počet všetkých koreňových kostier $\overrightarrow{G}$ s koreňom vo vrchole v_4.



Riešenie. Máme

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{K_4} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \det \boldsymbol{K_4} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Teda $p(\overrightarrow{T_{v_4}}) = \det \boldsymbol{K}_4 = 2$.

Definícia

Binárnym stromom nazývame koreňový strom $\overrightarrow{T}_v$, v ktorom má každý vrchol vonkajší stupeň 0 alebo 2. Hĺbkou hl $\overrightarrow{T}_v$ binárneho stromu nazývame excentricitu jeho koreňa, t. j.

$$\mathrm{hl}\,\overrightarrow{T}_v = \max_{u \in V} \overrightarrow{d}(v, u).$$

Kompletným binárnym stromom hĺbky k nazývame binárny strom $\overrightarrow{T}_v$, v ktorom je $\overrightarrow{d}(v, u) = k$ pre každý list u.

Vonkajšia a vnútorná dĺžka

Veta

Pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ existuje binárny strom s n listami.

Veta

Binárny strom s n listami obsahuje $n-1$ vnútorných vrcholov a $2(n-1)$ hrán.

Definícia

Nech $To_v = (V, H)$ je binárny strom. Vonkajšou dĺžkou $E(\overrightarrow{T}_v)$, resp. vnútornou dĺžkou $I(\overrightarrow{T}_v)$ binárneho stromu nazývame čísla určené vzťahmi

$$E(\overrightarrow{T}_v) = \sum_{u \in V_e} \overrightarrow{d}(v,u), \quad I(\overrightarrow{T}_v) = \sum_{u \in V_i} \overrightarrow{d}(v,u), \tag{6}$$

kde V_e je množina listov a V_i je množina vnútorných vrcholov binárneho stromu $\overrightarrow{T}_v$.

Veta

Nech E je vonkajšia dĺžka I je vnútorná dĺžka binárneho stromu s n listami. Potom

$$E = I + 2(n-1).$$

Veta

Binárny strom s n listami má minimálnu vonkajšiu (vnútornú) dĺžku I práve vtedy, keď pre každý jeho list u platí

$$k - 1 \leq \overrightarrow{d}(v, u) \leq k,$$

kde k je hĺbka binárneho stromu.

Ohodnotené binárne stromy

Predpokladajme, že každý list v_i binárneho stromu má priradené nezáporné číslo w_i – jeho váhu.

Definícia

Pod vonkajšou w–dĺžkou $E_w(\overrightarrow{T}_v)$ binárneho stromu $\overrightarrow{T}_v$ s n listami budeme rozumieť číslo

$$E_w(\overrightarrow{T}_v) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \overrightarrow{d}(v, v_i).$$

Binárny strom s minimálnou vonkajšou w–dĺžkou

Predpokladajme, že máme zadané hodnoty $w_1, w_2, \dots, w_n$. Našim cieľom je zostrojiť binárny strom, ktorého listy majú váhy $w_1, w_2, \dots, w_n$ a jeho vonkajšia w–dĺžka je minimálna.

Algoritmus pre nájdenie binárneho stromu s minimálnou vonkajšou w**–dĺžkou**:

1. Hodnoty $w_1, w_2, \dots, w_n$ usporiadame do nerastúcej postupnosti. Predpokladajme teda, že $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$. Každú hodnotu w_i priradíme jednému izolovanému vrcholu (budúce listy) a položíme $k := n - 1$.
2. Položíme $w'_k = w_k + w_{k+1}$, vytvoríme nový vnútorný vrchol, ktorý ohodnotíme číslom w'_k a jeho následníky budú vrcholy s hodnotami w_k a w_{k+1}. Použité hodnoty w_k a w_{k+1} z postupnosti vynecháme a hodnotu w'_k zaradíme do postupnosti tak, aby ostala nerastúca. Indexovanie posunieme tak, že index k bude mať najväčšia hodnota.
3. Ak je $k > 1$, položíme $k := k - 1$ a ideme na krok 2, inak algoritmus končí.

Príklad

Nájdite optimálne kódovanie znakov A, B, C, D, E, F pomocou binárnych postupností premennej dĺžky, pričom pravdepodobnosť výskytu jednotlivých znakov v kódových správach je daná tabuľkou:

znak	A	B	C	D	E	F
p	$0,32$	$0,08$	$0,08$	$0,18$	$0,2$	$0,14$

Riešenie.

Kódovanie znakov vykonáme tak, že každej hrane smerujúcej vo výslednom strome doľava priradíme číslo 0 a každej hrane smerujúcej doprava priradíme číslo 1. Pre každý list vyjadríme cestu k nemu pomocou zodpovedajúcej postupnosti čísel 0 a 1.

znak	A	B	C	D	E	F
kód						

Vonkajšia $w-$dĺžka je
$E_w = 2 \cdot (0,32 + 0,18 + 0,2) + 3 \cdot 0,14 + 4 \cdot (0,08 + 0,08) = 2,46$
a priemerná dĺžka kódu je $\frac{17}{6} \approx 2,83$.

Aplikácie grafov a digrafov

Algoritmy budeme považovať za *rýchly*, ak je možné počet krokov, ktoré algoritmus pri výpočte vykoná, ohraničiť konštantným násobkom polynomiálnej funkcie. Ak je algoritmus rýchly, tak so zväčšovaním vstupu algoritmu je nárast času na jeho úspešné ukončenie „zvládnuteľný“ rýchlejším počítačom. V opačnom prípade hovoríme, že algoritmus nie je efektívny.
Jednou zo základných úloh v teórii grafov je nájsť najkratšiu cestu medzi dvoma vrcholmi grafu. Taká požiadavka sa vyskytuje v mnohých praktických aplikáciách (napríklad pri hľadaní najkratšieho dopravného spojenia). V takých grafoch sa hrany označujú číslami, ktorých význam je rôzny a záleží od toho, aká úloha sa daným grafom rieši.

Definícia

Majme graf $G = (V, H)$, $|V| = n$. Nech $\mathbb{R}^+$ je množina kladných reálnych čísel. Zobrazenie $f : H \to \mathbb{R}^+$ nazývame **hranovým ohodnotením** *grafu G. Pre každú hranu $\{v_i, v_j\} \in H$ číslo $w_{ij} = f(\{v_i, v_j\}) \in \mathbb{R}^+$ nazývame* **ohodnotením hrany** *$\{v_i, v_j\}$.*
Podobne definujeme hranové ohodnotenie aj pre digrafy, iba namiesto neorientovaných hrán $\{v_i, v_j\}$ uvažujeme orientované hrany (v_i, v_j).

Minimálna kostra grafu

Až doteraz boli pre nás rôzne kostry daného grafu v zásade rovnocenné, pretože všetky obsahovali rovnaký počet hrán. Iná situácia nastane v hranovo ohodnotenom grafe. V takom prípade má zmysel hľadať kostry grafu, ktoré majú extremálny (t.j. najmenší alebo najväčší) súčet ohodnotení hrán.

Definícia

Nech $T = (V, H')$ je kostra hranovo ohodnoteného súvislého grafu $G = (V, H)$ **Váha kostry** T *je súčet hranových ohodnotení všetkých hrán z H'.* **Minimálna (maximálna) kostra** *grafu $G = (V, H)$ je kostra s minimálnou (maximálnou) váhou.*

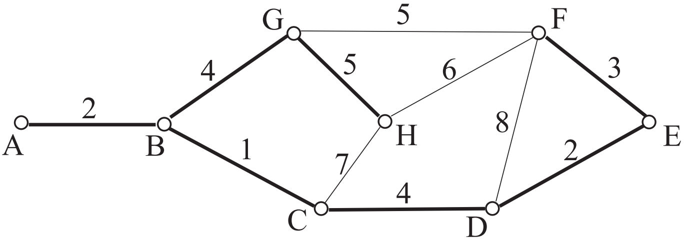
Príklad

Predpokladajme, že máme plán okresu, v ktorom existuje určitá sieť ciest prvej triedy. Je potrebné v zimnom období zabezpečiť dopravu tak, aby:

a) ľubovoľné dve obce boli spojené zjazdnou cestou,

b) náklady na údržbu ciest boli minimálne.

Majme graf, ktorého diagram je modelom tejto situácie. Hranám priradíme hodnoty nákladov na údržbu ciest.



Riešením je kostra grafu (silnejšie vyznačená), ktorej súčet ohodnotení hrán je 21.

Kruskalov algoritmus

Vstup: Hranovo ohodnotený graf $G = (V, H)$.
Výstup: Minimálna kostra $T = (V, H')$.

1. Zostroj diskrétny faktor $T = (V, \emptyset)$.
2. Zoraď hrany grafu G do neklesajúcej postupnosti vzhľadom na ich ohodnotenia.
3. Do T pridaj z neklesajúcej postupnosti prvú hranu, ktorá v T nevytvorí kružnicu, a z postupnosti hrán ju odober.
4. Ak $|H'| = |V| - 1$, STOP ($T = (V, H')$ je minimálna kostra), inak skok na krok 3.

Z popísaného algoritmu vyplýva, že ak ohodnotenia všetkých hrán sú navzájom rôzne, tak existuje jediná minimálna kostra grafu G. V opačnom prípade môže existovať viac rôznych minimálnych kostier.

Poznámka Algoritmus pre hľadanie maximálnej kostry je obdobný, v kroku 2 zoradíme hrany grafu G do nerastúcej postupnosti.

Primov algoritmus

Vstup: Hranovo ohodnotený graf $G = (V, H)$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.
Výstup: Minimálna kostra $T = (V(T), H'(T))$.

1. Polož $T := (V(T), H'(T))$, $V(T) := \{v_1\}$, $H'(T) := \emptyset$.
2. Ak $|V(T)| = n$, STOP (T je minimálna kostra).
3. Pre $v_i \in V(T)$ a $v_j \in V(G) \setminus V(T)$ zvoľ hranu $\{v_i, v_j\}$ s minimálnym ohodnotením.
   Polož $V(T) := V(T) \cup \{v_j\}$, $H'(T) := H'(T) \cup \{v_i, v_j\}$.
   (Ak je viac hrán $\{v_i, v_j\}$ s rovnakým minimálnym ohodnotením, z nich majú najprv prednosť hrany s najmenším i a potom s najmenším j).
   Skok na krok 2.

Dĺžka minimálnej cesty

Predstavme si, že súvislý hranovo ohodnotený graf predstavuje nejakú cestnú sieť, v ktorej vrcholy odpovedajú mestám a križovatkám a hodnoty hrán odpovedajú vzdialenostiam medzi bodmi reprezentovanými vrcholmi. V takom grafe chceme nájsť najvýhodnejšie „spojenia“.

Definícia

Nech S je cesta z vrcholu v_i do vrcholu v_j v ohodnotenom grafe G. Súčet ohodnotení hrán cesty S nazveme **dĺžkou cesty** *S. Pre dva vrcholy v_i a v_j potom minimálnu z dĺžok ciest medzi v_i a v_j nazveme* **dĺžkou minimálnej cesty** *a označíme symbolom $d_w(v_i, v_j)$.*

Pri riešení úloh súvisiacich so vzdialenosťou sa najčastejšie stretávame s nasledujúcimi variantmi:

1. pre dané dva vrcholy u, v ohodnoteného grafu určiť vzdialenosť medzi u a v,
2. pre daný vrchol u určiť vzdialenosti z u do každého vrcholu ohodnoteného grafu,
3. určiť vzdialenosti medzi všetkými dvojicami vrcholov ohodnoteného grafu.

Vstupom Dijkstrovho algoritmu je hranovo ohodnotený graf $G = (V, H)$ a začiatočný vrchol a, od ktorého sa určuje dĺžka minimálnej cesty (vzdialenosť) $d_w(a, v)$ k vrcholu v pre všetky $v \in V$. Pre každý vrchol $v \in V$ sa zavádza premenná $L(v)$. Je to číslo, ktoré udáva momentálny „odhad" dĺžky minimálnej cesty z a do v. Presnejšie, v každom momente je $d_w(a, v) \leq L(v)$, čo znamená, že v priebehu práce algoritmu sa pre niektoré vrcholy môže $L(v)$ zmenšovať, pre iné sa hodnota $L(v)$ už stáva pevnou a vtedy je presne rovná $d_w(a, v)$. Algoritmus pracuje ešte s premennou A, čo je množina „aktívnych" vrcholov, teda vrcholov s premennou hodnotou $L(v)$. Na začiatku je $A = V$. V hlavnom kroku algoritmu vyberieme z množiny vrcholov s pevnými hodnotami L vrchol v, ktorý má hodnotu $L(v)$ minimálnu, t.j. do ktorého je z vrcholu a najkratšia vzdialenosť zo všetkých už známych vzdialeností. Potom zisťujeme, či sa cez tento vrchol v môžu skrátiť doteraz známe nie pevné vzdialenosti do jeho susedov (vrcholov s ešte nie pevnou hodnotou $L(x)$) cez hrany, ktoré ich spájajú. Ak áno, príslušné vrcholy dostanú menšiu hodnotu $L(x)$.

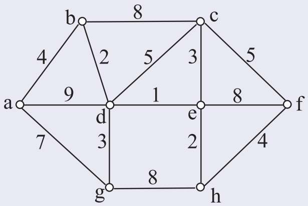
Algoritmus určenia minimálnej cesty (Dijkstra)

Vstup: Hranovo ohodnotený graf $G = (V, H)$, počiatočný vrchol a.
Výstup: $L(x) = d_w(a, x)$ pre každý vrchol $x \in V$.

1. Polož $L(a) := 0$; $L(x) := \infty$ pre každé $x \in V \setminus \{a\}$; $A := V$.
2. Ak $A = \emptyset$, STOP.
3. Polož $v := \{y \in A;\ L(y) \leq L(z),\ z \in A\}$ (ak je viac možností, zvoľľubovoľnú).
   Polož $A := A \setminus \{v\}$.
4. Pre všetky $x \in A$ také, že $\{v, x\} \in H$ polož
   $L(x) := \min\{L(x),\ L(v) + f(\{v, x\})\}$.
   Skok na krok 2.

Príklad

Zistite dĺžky minimálnych ciest z vrcholu a do všetkých vrcholov ohodnoteného grafu, ktorého diagram je na obrázku.



Riešenie. Získané hodnoty $L(x)$ pri jednotlivých prechodoch cyklami (2–3–4) algoritmu sú zapísané v nasledujúcej tabuľke. Podčiarknuté hodnoty sú pri vrcholoch, ktoré sme v 3. kroku zvolili za vrchol v. Sú to vlastne definitívne hodnoty $L(v) = d_w(a, v)$ pre všetky $v \in V$.

a	b	c	d	e	f	g	h
$\underline{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	$\underline{4}$	∞	9	∞	∞	7	∞
		12	$\underline{6}$	∞	∞	7	∞
		11		7	∞	$\underline{7}$	∞
		11		$\underline{7}$	∞		15
		10			15		$\underline{9}$
		$\underline{10}$			13		
					$\underline{13}$		

Dĺžka minimálneho spojenia

Uvažujme súvislý hranovo ohodnotený digraf $\overrightarrow{G} = (V, H)$, to znamená, že každej hrane (v_i, v_j) je priradené kladné reálne číslo $f((v_i, v_j)) = w_{ij}$. Nech $\overrightarrow{S}$ je spojenie z vrcholu v_i do vrcholu v_j. Súčet ohodnotení hrán spojenia $\overrightarrow{S}$ nazývame **dĺžkou spojenia** $\overrightarrow{S}$. Pre dva vrcholy v_i a v_j potom minimálnu z dĺžok spojení z v_i do v_j nazveme **dĺžkou minimálneho spojenia** a označíme symbolom $\overrightarrow{d}_w(v_i, v_j)$. Ak nedôjde k nedorozumeniu, budeme skrátene hovoriť o vzdialenosti z v_i do v_j.
Na ohodnotenom digrafe si ukážeme, ako určiť vzdialenosti medzi všetkými dvojicami vrcholov ohodnoteného grafu. K tomu potrebujeme pojmy *cenová* a *dištančná* matica.

Cenová a dištančná matica

Definícia

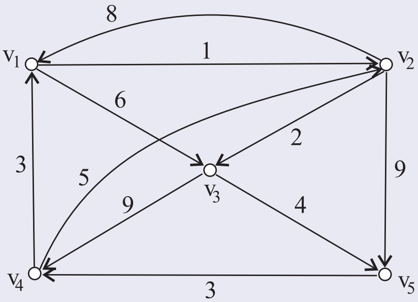
Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$, $|V| = n$, *je hranovo ohodnotený digraf. Štvorcovú maticu* $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ *rádu n nazývame* **cenovou maticou**, *ak pre jej prvky platí*

$$c_{ij} = \begin{cases} w_{ij}\,, & ak\ (v_i, v_j) \in H, \\ \infty\,, & ak\ (v_i, v_j) \notin H, \\ 0\,, & ak\ i = j\,. \end{cases}$$

Cenová matica sa zo zadaného ohodnoteného digrafu získa ľahko a slúži nám na výpočet **dištančnej matice** (matice vzdialeností), v ktorej sú prehľadne zapísané dĺžky minimálnych spojení medzi všetkými dvojicami vrcholov, teda $d_{ij} = \overrightarrow{d}(v_i, v_j)$. Našim cieľom je teda vypočítať dištančnú maticu. Jedným z možných postupov na jej určenie je tzv. **Floydov algoritmus**, v ktorom štartujeme z cenovej matice a postupným „prepisovaním" získame dištančnú maticu.

Príklad

Zostrojte dištančnú maticu digrafu $\overrightarrow{G}$, ktorého diagram je na obrázku.



Riešenie. Najprv napíšeme cenovú maticu $\boldsymbol{C}$ a položíme ju rovnú matici $\boldsymbol{D}^{(0)}$. Pre $k = 1$ sú v matici $\boldsymbol{D}^{(0)}$ prvý riadok a prvý stĺpec „pracovné“, a pre prvok $d_{ij}^{(1)}$ zostrojovanej matice $\boldsymbol{D}^{(1)}$ platí, že je rovný menšiemu z dvojice čísel: prvok na pozícii ij v matici $\boldsymbol{D}^{(0)}$, resp. súčet prvku na pozícii $i1$ prvku na pozícii $1j$. Podobne konštruujeme $\boldsymbol{D}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{D}^{(5)} = \mathbf{D}$.

$$
\boldsymbol{D}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & \infty & \infty \\ 8 & 0 & 2 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 5 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & \infty & \infty \\ 8 & 0 & 2 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & \infty & 10 \\ 8 & 0 & 2 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 12 & 7 \\ 8 & 0 & 2 & 11 & 6 \\ \infty & \infty & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{D}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 12 & 7 \\ 8 & 0 & 2 & 11 & 6 \\ 12 & 13 & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 10 & 7 \\ 8 & 0 & 2 & 9 & 6 \\ 10 & 11 & 0 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{D}.
$$

Floydov algoritmus

Vstup: Hranovo ohodnotený digraf $\overrightarrow{G} = (V, H)$ s vrcholmi $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
Výstup: Dištančná matica $\boldsymbol{D} = (d_{ij})$.

1. Polož $\boldsymbol{D}^{(0)} := \boldsymbol{C}$, kde $\boldsymbol{C}$ je cenová matica digrafu $\overrightarrow{G}$, teda $d_{ij}^{(0)} = c_{ij}$ pre všetky $i, j = 1, 2, \ldots, n$.
   Polož $k := 1$.
2. Vytvor maticu $\boldsymbol{D}^{(k)} = d_{ij}^{(k)}$ tak, že
   $d_{ij}^{(k)} := \min\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\}$.
3. Ak $k = n$, STOP ($\boldsymbol{D}^{(k)} = \boldsymbol{D}$), inak polož $k := k + 1$.
   Skok na krok 2.

Poznámka. Floydov algoritmus sa dá bez problémov použiť aj na hľadanie dĺžky minimálnych ciest v neorientovanom grafe. Ak ho nechceme veľmi modifikovať, stačí v grafe G nahradiť každú hranu dvojicou opačne orientovaných hrán s rovnakým ohodnotením.