

Katedra matematiky a teoretickej informatiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Technická univerzita v Košiciach

GRAFOVÉ ALGORITMY A DISKRÉTNÁ
OPTIMALIZÁCIA

Marián Klešč

Košice 2015

NÁZOV: Grafové algoritmy a diskretná optimalizácia
AUTORI: Klešč Marián
VYDAVATEĽ: Technická univerzita v Košiciach
ROK: 2015
VYDANIE: prvé
NÁKLAD: 50 ks
ROZSAH: 65 strán
ISBN 978-80-553-2426-5

Učebný text bol vypracovaný v rámci projektu KEGA 032TUKE-4/2013.

Za odbornú stránku učebného textu zodpovedá autor.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

Obsah

úvod	3
1 Kombinatorika na množinách	5
1.1 Základné množinové pojmy	5
1.2 Základné kombinatorické princípy	8
1.3 Permutácie, variácie a kombinácie	11
1.4 Zovšeobecnené permutácie, variácie a kombinácie	14
1.5 Binomické koeficienty a binomické identity	17
1.6 Dirichletov princíp	20
1.7 úlohy	22
2 Inklúzia a exklúzia	25
2.1 Mohutnosť zjednotenia množín	25
2.2 Použitie princípu inklúzie a exklúzie	27
2.3 Alternatívny tvar princípu inklúzie a exklúzie	27
2.4 úlohy	32
3 Neorientované grafy	33
3.1 Definícia a základné typy grafov	33
3.2 Stupne vrcholov, súvislosť a metrika	36
3.3 Eulerovskosť, hamiltonovskosť a planárnosť	39
3.4 úlohy	42
4 Orientované grafy	43
4.1 Definícia digrafu	43
4.2 Súvislosť a silná súvislosť	44
4.3 Acyklické digrafy	46
5 Grafové algoritmy	47
5.1 Minimálne cesty a spojenia	47
5.2 Minimálna kostra grafu	51
5.3 Problém okružnej cesty	53

5.4	Problém obchodného cestujúceho	54
5.5	Metóda kritickej cesty	56
5.6	Toky v sieťach	58
5.7	úlohy	63
Literatúra		64

úvod

Cieľom tejto učebnice je ponúknuť študentom študijného programu *Počítačové modelovanie* základy z kombinatoriky a teórie grafov so zameraním na grafové algoritmy. Publikácia nemá nahradiť prednášky z príslušných predmetov, ale má pomôcť študentom v začiatočnom zorientovaní sa v problematike.

Učebná látka je členená do piatich kapitol, za ktorými sú úlohy na samostatné precvičovanie preberaného učiva. V prvých dvoch kapitolách sú základné poznatky z kombinatoriky. Tretia kapitola je venovaná neorientovaným grafom. Štvrtá kapitola podáva základné poznatky o orientovaných grafoch, ktoré sú potrebné v poslednej kapitole. Najrozsiahlejšia piata kapitola pojednáva o typických algoritmických úlohách na ohodnotených grafoch. Na záver je ukážka využitia teórie grafov v transportných sieťach pri určovaní maximálnych tokov.

Veríme, že táto učebná pomôcka bude napomocná pri začiatkoch štúdia grafových algoritmov.

Kapitola 1

Kombinatorika na množinách

1.1 Základné množinové pojmy

Jedným zo základných pojmov v matematike je pojem množiny. Vlastnosti množín budeme intenzívne využívať v kapitolách o kombinatorike. Pod **množinou** rozumieme súhrn (skupinu, súbor) nejakých navzájom odlišných objektov, ktoré podľa nejakého kritéria tvoria jeden celok.

Množinu považujeme za určenú, ak o každom objekte vieme rozhodnúť, či je alebo nie je prvkom danej množiny. Množiny budeme označovať pomocou veľkých písmen:

$$A, B, \dots, X, Y, \dots, M, N, \dots$$

a podobne, a prvky množín budeme označovať malými písmenami $a, b, \dots, x, y, \dots, m, n, \dots$. Skutočnosť, že a je prvkom množiny A zapíšeme

$$a \in A .$$

Ak a nie je prvkom množiny A , tak zapíšeme

$$a \notin A .$$

Množinu, ktorá neobsahuje žiadny prvok, nazývame **prázdnu množinou** a označujeme ju symbolom $\emptyset$.

Poznáme rôzne spôsoby určenia množín. Ak množina M obsahuje konečný počet prvkov $x_1, x_2, \dots, x_n$, vtedy používame zápis

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} .$$

Symbolom $|M|$ označujeme počet prvkov konečnej množiny M . My budeme pracovať predovšetkým s konečnými množinami.

Uvedomme si, že

$$D = \{\emptyset\}$$

je neprázdná množina obsahujúca jeden prvok $\emptyset$, a preto $D \neq \emptyset$. Stretávame sa aj s množinami, ktoré sú určené takto: K je množina všetkých prvkov $x \in B$, ktoré majú vlastnosť P . V tomto prípade píšeme:

$$K = \{x \in B; P(x)\}.$$

Niektoré množiny, hlavne číselné, majú všeobecne zaužívané označenia. Tak napríklad pre množinu všetkých **prirodzených** čísel, t.j. množinu $\{1, 2, 3, \dots\}$, používame symbol $\mathbb{N}$. Množinu všetkých **celých** čísel označujeme $\mathbb{Z}$. Racionálne čísla sú zlomky s celočíselným čitateľom aj menovateľom. Množinu všetkých **racionálnych** čísel označujeme $\mathbb{Q}$. Znak $\mathbb{R}$ je symbolom pre množinu všetkých **reálnych** a $\mathbb{C}$ pre množinu všetkých **komplexných** čísel.

Príklad 1.1

$$P = \{x \in \mathbb{N}; 3 < x^2 < 30\}$$

je množina všetkých prirodzených čísel, ktorých druhá mocnina je väčšia než 3 a menšia ako 30, teda

$$P = \{2, 3, 4, 5\}.$$

Definícia 1.1 Množina A je **podmnožinou** množiny B práve vtedy, ak každý prvok množiny A patrí aj do množiny B . Zapisujeme

$$A \subset B.$$

Je zrejmé, že $A = B$ práve vtedy, keď $A \subset B$ a súčasne aj $B \subset A$. Každá neprázdná množina A obsahuje najmenej dve podmnožiny a to $\emptyset$ a A .

Definícia 1.2 **Potenčná množina** množiny A je množina $\mathcal{P}(A)$, ktorej prvkami sú všetky podmnožiny množiny A .

Napríklad, ak $A = \{1, 2, 3\}$, tak

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Predpokladajme, že všetky množiny, s ktorými pracujeme, sú prvkami istej univerzálnej množiny U .

Definícia 1.3 **Zjednotenie** množín A a B je množina

$$A \cup B = \{x \in U; x \in A \text{ alebo } x \in B\}$$

a **prienik** množín A a B je množina

$$A \cap B = \{x \in U; x \in A \text{ a } x \in B\}.$$

Teda do $A \cup B$ patria práve tie prvky, ktoré sú prvkami aspoň jednej z množín A a B , a do $A \cap B$ patria práve tie prvky, ktoré sú prvkami množiny A aj množiny B .

Definícia 1.4 Dve množiny A a B sú **disjunktné**, ak ich prienikom je prázdna množina, t.j.

$$A \cap B = \emptyset.$$

Definícia 1.5 **Rozdiel** množín A a B je množina

$$A \setminus B = \{x \in U; x \in A \text{ a } x \notin B\}.$$

To znamená, že prvkami množiny $A \setminus B$ sú tie prvky množiny A , ktoré nepatria do B .

Definícia 1.6 **Komplement** (doplňok) množiny A je množina

$$\overline{A} = U \setminus A.$$

Operáciu zjednotenia a prieniku môžeme rozšíriť na ľubovoľný počet množín. Nech I je množina, ktorej budeme hovoriť množina indexov a pre každé $i \in I$ je definovaná množina $A_i \subset U$. Tým je daný systém množín $\{A_i; i \in I\}$.

Definícia 1.7 **Zjednotenie** systému množín $\{A_i; i \in I\}$ je množina $\bigcup_{i \in I} A_i$ práve tých prvkov z U , ktoré patria do niektorej z množín A_i .

Prienik systému množín $\{A_i; i \in I\}$ je množina $\bigcap_{i \in I} A_i$ práve tých prvkov z U , ktoré patria do všetkých množín A_i .

Poznámka. Ak $I = \{1, 2, \dots, k\}$, tak systém množín je $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$. Ich zjednotenie a prienik označujeme

$$\bigcup_{i=1}^k A_i \quad \text{a} \quad \bigcap_{i=1}^k A_i.$$

Definícia 1.8 Množiny systému $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ sú **po dvojiciach disjunktné**, ak

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

pre každú dvojicu indexov $i, j \in I$, $i \neq j$.

Definícia 1.9 **Rozklad** množiny $A \neq \emptyset$ je taký systém $\{A_i; i \in I\}$, pre ktorý platí

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A \quad \text{a} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{pre } i, j \in I, i \neq j.$$

Veta 1.1 *Nech A , B a C sú podmnožiny množiny U . Potom platí:*

- | | |
|--|--|
| 1. $A \cup B = B \cup A$, | $A \cap B = B \cap A$, |
| 2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, |
| 3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, |
| 4. $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$, | $A \cap U = U \cap A = A$, |
| 5. $A \cup \overline{A} = \overline{A} \cup A = U$, | $A \cap \overline{A} = \overline{A} \cap A = \emptyset$, |
| 6. $\overline{(\overline{A})} = A$, | |
| 7. $A \cup A = A$, | $A \cap A = A$, |
| 8. $A \cup U = U$, | $A \cap \emptyset = \emptyset$, |
| 9. $A \cup (A \cap B) = A$, | $A \cap (A \cup B) = A$, |
| 10. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$, | $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$. |

Tvrdeniam 10 vety 1.1 hovoríme **de Morganove pravidlá**. Vetu nebudeme dokazovať, čitateľ si jednotlivé vlastnosti môže overiť pomocou tzv. Vennových diagramov.

1.2 Základné kombinatorické princípy

V tejto časti uvedieme dva základné princípy, ktoré sú veľmi často používané v kombinatorických úlohách.

Princíp násobenia (multiplikačný)

Ak činnosť môže pozostávať z t po sebe nasledujúcich krokov a

1. krok môže byť uskutočnený n_1 spôsobmi,

2. krok môže byť uskutočnený n_2 spôsobmi,

$\vdots$

t -tý krok môže byť uskutočnený n_t spôsobmi,

tak počet rôznych spôsobov vykonania celej činnosti je

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_t.$$

Príklad 1.2 Koľko reťazcov dĺžky 4 je možné vytvoriť z písmen A, B, C, D a E, ak:

a) písmená sa neopakujú,

b) písmená sa neopakujú a každý reťazec začína písmenom B,

c) písmená sa neopakujú a reťazce nezačínajú písmenom B?

Riešenie. Na riešenie úlohy je vhodný multiplikačný princíp. Každý reťazec dĺžky štyri je možné vytvoriť v štyroch po sebe nasledujúcich krokoch tak, že v i -tom kroku vyberieme v poradi i -té písmeno. Prvé písmeno vyberáme z piatich. Keď je

už prvé písmeno vybrané, na výber druhého písmena máme iba štyri ostávajúce písmená. Podobne pri výbere tretieho písmena môžeme voliť iba z troch ostávajúcich písmen a pri výbere posledného štvrtého písmena už ostávajú iba dve možnosti. Takže v prípade a) je to

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

reťazcov.

V prípade b) začínajú všetky reťazce písmenom B, takže v prvom kroku máme iba jednu možnosť a to voľbu písmena B. V druhom kroku vyberáme jedno písmeno z ostatných štyroch, takže tento krok môže byť uskutočnený štyrmi spôsobmi. Teraz podobne ako v prípade a) máme na výber tretieho písmena tri možnosti a na výber štvrtého písmena dve možnosti. Takže

$$1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

reťazcov začína písmenom B.

V prípade c) môžeme postupovať podobne. Avšak, ak si uvedomíme, že našej požiadavke vyhovujú všetky reťazce z prípadu a), ktoré nie sú reťazcami z prípadu b), tak

$$120 - 24 = 96$$

reťazcov dĺžky štyri s neopakujúcimi sa písmenami je takých, ktoré nezačínajú písmenom B.

Príklad 1.3 Pomocou princípu násobenia ukážte, že k množine obsahujúcej n prvkov je možné vytvoriť práve 2^n jej rôznych podmnožín.

Riešenie. Uvažujme n prvkovú množinu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Proces vytvorenia ľubovoľnej podmnožiny tej n prvkovej množiny je možné rozdeliť do n po sebe nasledujúcich krokov nasledovne. V prvom kroku rozhodneme či prvok x_1 do nej zaradíme, alebo nie. To sú dve možnosti. V druhom kroku máme opäť dve možnosti a to, či prvok x_2 do vytváranej podmnožiny zaradíme, alebo nie. Takto máme vždy dve možnosti, a keďže naša množina má n prvkov, v n -tom kroku sa rozhodujeme o zaradení prvku x_n . Ak pri vytváraní nejakej podmnožiny aspoň v jednom kroku urobíme inú voľbu (z dvoch možností), než sme urobili pri vytváraní inej, tak tie podmnožiny sú určite rôzne. To znamená, že počet rôznych podmnožín množiny s n prvkami je

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_n = 2^n.$$

V tejto učebnici v kapitolách o kombinatorike budeme občas pracovať s bitovými reťazcami. Myslíme tým reťazce pozostávajúce z núl a jedničiek.

Príklad 1.4 Koľko je rôznych 8-bitových reťazcov, ktoré začínajú buď trojicou 101 alebo trojicou 111.

Riešenie. Princíp násobenia nám umožní zistiť počet reťazcov začínajúci trojicou 101 tak, že doplnenie zvyšných pozícií vykonáme v piatich po sebe idúcich krokoch. V prvom doplníme znak na štvrtú pozíciu, v druhom doplníme znak na piatu pozíciu. Takto pokračujeme až do piateho kroku, v ktorom doplníme znak na ôsmu pozíciu. V každom kroku sa rozhodujeme, či doplníme 0 alebo 1. Máme teda dve možnosti na vykonanie každého kroku. To znamená, že počet rôznych 8-bitových reťazcov začínajúcich trojicou 101 je

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32.$$

Podobne zistíme, že počet rôznych 8-bitových reťazcov začínajúcich trojicou 111 je tiež

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32.$$

My sme sa však pýtali na to, koľko je rôznych 8-bitových reťazcov začínajúcich trojicou 101 alebo trojicou 111. Na to potrebujeme nasledujúci kombinatorický princíp.

Princíp sčítavania (aditívny)

Nech $X_1, X_2, \dots, X_t$ sú množiny a nech i -tá množina X_i obsahuje n_i prvkov, $i = 1, 2, \dots, t$. Ak množiny $X_1, X_2, \dots, X_t$ sú po dvojiciach disjunktné, t.j. pre $i \neq j$ je $X_i \cap X_j = \emptyset$, tak počet rôznych prvkov v zjednotení $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t$ je

$$n_1 + n_2 + \dots + n_t.$$

Teraz môžeme uvažovať množinu X_1 obsahujúcu všetky 8-bitové reťazce začínajúce trojicou 101. Počet jej prvkov je 32. Podobne, nech X_2 je množina všetkých 8-bitových reťazcov, ktoré začínajú trojicou 111. Tá má tiež 32 prvkov. Tieto dve množiny sú disjunktné. V ďalšej časti riešenia môžeme teda použiť princíp sčítavania a dostaneme, že počet rôznych 8-bitových reťazcov, ktoré majú na začiatku 101 alebo 111 je rovný súčtu počtu prvkov v množinách X_1 a X_2 , teda

$$|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2| = 32 + 32 = 64.$$

Zhrnime teda, kedy použijeme princíp násobenia a kedy princíp sčítavania. Ak počítame objekty, ktoré sú konštruované postupnými krokmi, použijeme princíp násobenia. Ak máme disjunktné množiny objektov a chceme poznať počet objektov v nich, použijeme princíp sčítavania. Nasledujúci príklad ilustruje použitie oboch princípov.

Príklad 1.5 Koľko je možností vybrať dvojicu kníh rôznych žánrov, ak máme k dispozícii tri žánre: matematiku, fyziku a beletriu. Z matematicky máme na výber z piatich rôznych kníh, z fyziky sú v ponuke tri rôzne knihy a beletria ponúka šesť titulov.

Riešenie. Výber dvoch kníh vykonáme v dvoch po sebe idúcich krokoch. Ak sa rozhodneme pre dvojicu žánrov matematika a fyzika, je $5 \cdot 3 = 15$ možností voľby. Podobne pre dvojicu žánrov matematika a beletria je počet rôznych výberov $5 \cdot 6 = 30$. A nakoniec pre dvojicu žánrov fyzika a beletria je to $3 \cdot 6 = 18$ rôznych možností. Keďže takto vybrané množiny kníh dvojíc žánrov sú disjunktné, podľa princípu sčítavania je

$$15 + 30 + 18 = 63$$

možností výberu dvojice kníh, ak z matematiky, z fyziky aj z beletrie je vo výbere najviac jedna kniha.

1.3 Permutácie, variácie a kombinácie

Často je potrebné určiť počet rôznych usporiadaní alebo zoradení prvkov, napríklad ľudí do zástupu. Túto problematiku riešia permutácie.

Definícia 1.10 *Nech $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Permutácia n prvkov $x_1, x_2, \dots, x_n$ je bijektívne zobrazenie $f: S \rightarrow S$.*

Pripomeňme, že zobrazenie je bijektívne, ak rôznym vzorom odpovedajú rôzne obrazy a tiež každý prvok z druhej množiny má v prvej množine svoj vzor. V definícii je prvá a druhá množina tá istá, čo znamená, že ak máme pevne zoradené vzory, tak im odpovedá nejaké pevné zoradenie obrazov pozostávajúce z tých istých prvkov. Permutáciu môžeme definovať aj voľnejším jazykom takto:

Permutácia n prvkov $x_1, x_2, \dots, x_n$ je ľubovoľné usporiadanie tých n prvkov.

To znamená, že za permutáciu n prvkov považujeme usporiadanie obrazov v zobrazení $f: S \rightarrow S$, pričom vzory boli dopredu pevne usporiadané.

Pre tri písmená A, B, C sa ľahko presvedčíme, že počet ich rôznych usporiadaní je 6 a to: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB a CBA. Nasledujúca veta nám dáva odpoveď na otázku, koľko existuje rôznych permutácií pre ľubovoľný počet prvkov.

Veta 1.2 *Existuje práve $n!$ permutácií n prvkov.*

Dôkaz. Dôkaz urobíme pomocou princípu násobenia. Permutácia n prvkov môže byť zostrojená postupným vykonaním n krokov takto: zvolíme prvý prvok permutácie, zvolíme druhý prvok, atď., až zvolíme posledný n -tý prvok. Prvý prvok je možné vybrať z ponuky všetkých n prvkov, máme teda n možností pre prvý

krok. Ak je prvý prvok permutácie zvolený, v druhom kroku už môžeme vyberať iba z $n - 1$ ostatných prvkov, takže je $n - 1$ možností, ako vykonať druhý krok. Takto postupujeme ďalej, až v poslednom n -tom kroku už máme iba jednu možnosť, pretože všetky ostatné prvky už sú zaradené v permutácii. Podľa princípu násobenia je

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

rôznych permutácií n prvkov. □

Počet rôznych permutácií n prvkov označujeme symbolom $P(n)$. Podľa vety 1.2 teda platí

$$P(n) = n!.$$

Príklad 1.6 Koľko permutácií písmen ABCDEF obsahuje podreťazec DEF?

Riešenie. Aby sme zabezpečili, že písmená DEF budú spolu a v tomto poradí, môžeme túto konfiguráciu písmen považovať za jeden prvok. Ten, spolu s ostatnými tromi písmenami, tvorí štvoricu prvkov, ktorú potrebujeme usporiadať všetkými možnými spôsobmi. Uvažujeme teda permutácie zo štyroch prvkov a tých je

$$4! = 24.$$

Príklad 1.7 Koľko permutácií písmen ABCDEF obsahuje skupinu DEF spolu v ľubovoľnom poradí?

Riešenie. Tento problém môžeme riešiť v dvoch po sebe nasledujúcich krokoch. V prvom kroku zostrojíme skupinu pozostávajúcu z písmen DEF. V druhom kroku považujeme túto skupinu za jeden prvok a konštruujeme permutáciu zo štyroch prvkov, a to s písmen A, B, C a štvrtým prvkom je skupina DEF.

Podľa vety 1.2 existuje $3! = 6$ rôznych výsledkov po uskutočnení prvého kroku. Podľa príkladu 1.6 je 24 možných výsledkov druhého kroku. Ak teraz použijeme princíp násobenia, dostaneme, že počet všetkých možných usporiadaní písmen ABCDEF s podmienkou, že písmená DEF sú spolu, je

$$3! \cdot 4! = 6 \cdot 24 = 144.$$

Niekedy nastanú situácie, že zo skupiny n prvkov potrebujeme usporiadať iba niektoré. K tomu potrebujeme nasledujúci pojem.

Definícia 1.11 *Variácia k -tej triedy z n prvkov $x_1, x_2, \dots, x_n$ je usporiadanie ľubovoľnej k -prvkovej podmnožiny množiny $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.*

Je zrejmé, že definícia 1.11 vyžaduje, aby číslo $k \leq n$. Tiež si všimnime, že záleží na usporiadaní vybraných prvkov. Počet rôznych variácií k -tej triedy z n prvkov označujeme symbolom $V(n, k)$. Nasledujúca veta hovorí o tom, čomu je toto číslo rovné.

Veta 1.3 *Nech $k \leq n$. Potom počet variácií k -tej triedy z n prvkov je*

$$V(n, k) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1).$$

Dôkaz. Počítajme, koľko je rôznych možností usporiadania k prvkov z množiny, ktorá obsahuje n prvkov. Je n možností na vybratie prvého prvku. Ak je ten zvolený, na vybratie druhého prvku zostáva už iba $n-1$ možností. Takto pokračujeme ďalej. Keď je už vybraných $k-1$ prvkov, na výber posledného k -tého prvku ostáva $n-k+1$ možností, pretože práve toľko prvkov sme ešte nevybrali. Podľa princípu násobenia teda je

$$V(n, k) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)$$

rôznych možností ako usporiadať k prvkov z n prvkovej množiny, t.j. je práve toľko rôznych variácií k -tej triedy z n prvkov. $\square$

Číslo $V(n, k)$ sa často zapisuje v tvare pomocou faktoriálov. Všimnime si nasledujúcu úpravu:

$$\begin{aligned} V(n, k) &= n(n-1) \cdots (n-k+1) \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)(n-k) \cdots 2 \cdot 1}{(n-k) \cdots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Príklad 1.8 Máme usporiadať sedem mužov a päť žien do radu tak, aby žiadne dve ženy neboli vedľa seba. Koľko je takých možností?

Riešenie. Postupujeme v dvoch po sebe nasledujúcich krokoch. V prvom kroku usporiadame sedem mužov. To sú permutácie zo siedmich prvkov, takže k dispozícii je $7! = 5040$ možností. V druhom kroku rozmiestnime päť žien. Medzi dvoch mužov je možné umiestniť iba jednu ženu, alebo žiadnu. To isté platí pre pozíciu pred začiatkom mužského radu a tiež pre pozíciu na jeho konci. Máme teda k dispozícii osem miest, pričom na každé môžeme umiestniť najviac ak jednu ženu. Stačí teda z nich vybrať 5-prvkovú podmnožinu a na tieto pozície umiestňovať ženy. Samozrejme, že poradie žien tiež hrá úlohu. To znamená, že počet rôznych rozmiestnení žien je rovný počtu variácií 5-tej triedy z 8 prvkov, t.j. $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$. Podľa princípu násobenia potom počet rôznych usporiadaní 7 mužov a 5 žien tak, že ženy nie sú vedľa seba je

$$P(7) \cdot V(8, 5) = 5040 \cdot 6720 = 33\,868\,800.$$

Definícia 1.12 *Kombinácia k -tej triedy z n prvkov $x_1, x_2, \dots, x_n$ je ľubovoľný výber k -prvkovej podmnožiny z množiny $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.*

Aj definícia 1.12 vyžaduje, aby číslo k nebolo väčšie ako číslo n . Na rozdiel od variácií, v prípade kombinácií nezáleží na usporiadaní vybraných prvkov. Počet rôznych kombinácií k -tej triedy z n prvkov označujeme symbolom $C(n, k)$. Nasledujúca veta hovorí o tom, čomu je toto číslo rovné.

Veta 1.4 *Nech $k \leq n$. Potom počet kombinácií k -tej triedy z n prvkov je*

$$C(n, k) = \frac{n!}{(n - k)! \cdot k!}.$$

Dôkaz. Z množiny, ktorá obsahuje n prvkov, vyberieme k prvkov. To je jedna kombinácia k -tej triedy z n prvkov. Je $k!$ možností usporiadania tých k prvkov. Každé také usporiadanie je variáciou k -tej triedy z n prvkov. Je teda zrejmé, že počet všetkých variácií k -tej triedy z n prvkov je $k!$ -krát väčší ako je počet kombinácií k -tej triedy z n prvkov. Teda

$$C(n, k) = \frac{V(n, k)}{k!} = \frac{n!}{(n - k)! \cdot k!}.$$

□

Poznámka. Na označenie čísla $V(n, k)$ je často používaný symbol $\binom{n}{k}$. Takže

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n - k)! \cdot k!}.$$

1.4 Zovšeobecnené permutácie, variácie a kombinácie

Ak sme doteraz uvažovali o permutáciách, variáciách a kombináciách, uvažovali sme o výberoch, resp. usporiadaných výberoch, v ktorých sa každý objekt mohol vyskytnúť najviac raz. Často sa však stretávame s výbermi, v ktorých sa objekty záujmu môžu vyskytovať viackrát. Napríklad v telefónnych číslach sa jednotlivé číslice môžu opakovať.

Príklad 1.9 Koľko rôznych rozlíšiteľných slov môžeme zostrojiť, ak každé z nasledujúcich 11 písmen použijeme práve raz?

ABRAKADABRA

Riešenie. Skúmaný počet je určite menší ako $11!$, pretože niektoré písmena sa v ponuke vyskytujú viackrát. Uvažujme 11 pozícií, ako je vyznačené,

— — — — — — — — — — —

a umiestňujeme písmená z našej ponuky na tieto pozície. Nezáleží pritom, ktorým písmenom začneme. V prvom kroku napríklad môžeme rozmiestniť 5 písmen A. Je

jasné, že na poradí, v akom ich rozmiestnime, nezáleží. Rozhodujúce sú pozície, ktoré obsadia. Vyberáme teda päť pozícií z jedenástich voľných. Počet rôznych možných takýchto výberov je rovný počtu kombinácii piatej triedy z jedenástich prvkov, teda $C(11, 5)$. V druhom kroku rozmiestníme napríklad 2 písmená B na ešte voľné pozície. Týchto možností je $C(6, 2)$. Podobne v treťom kroku pri rozmiestňovaní dvoch písmen R je počet možností $C(4, 2)$. Ostali nám ešte dve voľné pozície, na ktoré je potrebné umiestniť jedno K a jedno D. Na umiestnenie písmena K vo štvrtom kroku máme $C(2, 1)$ možností a v poslednom kroku je už iba jedno voľné miesto pre písmeno D. Počet týchto možností je však možné vyjadriť výrazom $C(1, 1)$. Podľa princípu násobenia je počet všetkých možností o

$$\begin{aligned} & C(11, 5) \cdot C(6, 2) \cdot C(4, 2) \cdot C(2, 1) \cdot C(1, 1) \\ &= \frac{11!}{5! \cdot 6!} \frac{6!}{2! \cdot 4!} \frac{4!}{2! \cdot 2!} \frac{2!}{1! \cdot 1!} \frac{1!}{1! \cdot 0!} = 83\,160. \end{aligned}$$

V predchádzajúcom príklade sa nejednalo o permutácie, ako sme ich poznali doteraz. Záležalo v nich na usporiadaní, ale nerozlíšiteľné objekty sa mohli opakovať. Takéto usporiadanie zvykneme nazývať **zovšeobecnená permutácia** alebo **permutácia s opakovaním**. O počte rôznych zovšeobecnených permutácií hovorí nasledujúca veta.

Veta 1.5 *Ak postupnosť S pozostávajúca z n rôznych pozícií obsahuje*

n_1 rovnakých prvkov typu 1,

n_2 rovnakých prvkov typu 2,

$\vdots$

n_t rovnakých prvkov typu t ,

pričom $n_1 + n_2 + \dots + n_t = n$, tak počet rôznych usporiadaní postupnosti S je

$$P(n_1, n_2, \dots, n_t) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_t!}.$$

Dôkaz. Uvažujme n pozícií pre vytváranú postupnosť S . Na označenie n_1 pozícií prvkom typu 1 máme $C(n, n_1)$ možností. Ak už tieto sú označené, tak pre výber n_2 pozícií pre prvky typu 2 na zvyšných $n - n_1$ pozíciách je $C(n - n_1, n_2)$ možností, atď. Podľa princípu násobenia je teda počet všetkých možných postupností dĺžky n z uvažovaných prvkov

$$\begin{aligned} & C(n, n_1) \cdot C(n - n_1, n_2) \cdot C(n - n_1 - n_2, n_3) \cdot \dots \cdot C(n - n_1 - \dots - n_{t-1}, n_t) \\ &= \frac{n!}{n_1!(n - n_1)!} \frac{(n - n_1)!}{n_2!(n - n_1 - n_2)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n - n_1 - \dots - n_{t-1})!}{n_t! \cdot 0!} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_t!}. \end{aligned}$$

□

Ďalšie zovšeobecnenie našich úvah ilustrujeme na nasledujúcom príklade.

Príklad 1.10 Tri deti Janko, Anička a Maroš si chcú rozdeliť balíček desiatich rovnakých cukríkov. Koľko možností rôznych rozdelení majú k dispozícii?

Riešenie. Zadanie úlohy nežiada, aby každé z detí dostalo nejaký cukrík. Ak teda uvažujeme, že Janko dostane x_1 cukríkov, Anička dostane x_2 cukríkov a Maroš bude mať x_3 cukríkov, tak každé x_i , $i = 1, 2, 3$, môže nadobúdať celočíselné hodnoty od 0 do 10. Keďže žiadny cukrík nie je možné prideliť dvom a viac deťom, počet rôznych možností rozdelenia tohto balíčka cukríkov trom deťom je ten istý ako je počet rôznych riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10,$$

pričom každá hodnota x_i , $i = 1, 2, 3$, je z množiny $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$.

Takto upravenú úlohu môžeme riešiť nasledovnou úvahou: Predstavme si že v rade desiatich pozícií pre jedničky oddelíme prvých x_1 pozícií zľava nejakým oddeľovačom. Po ďalších x_2 jedničkách dáme druhý oddeľovač. Za ním ostane ešte x_3 jedničiek. Takto spolu s dvojicou oddeľovačov sme obsadili 12 pozícií. Je jasné, že $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ a máme jedno z riešení našej rovnice. Napríklad usporiadanie

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad | \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad | \quad 1 \quad 1$$

znamená, že $x_1 = 3$, $x_2 = 5$ a $x_3 = 2$.

Akékoľvek premiestnenie oddeľovačov na uvažovaných 12 pozíciách má za následok vznik iného riešenia. Počet všetkých riešení je teda rovný počtu rôznych rozmiestnení dvoch oddeľovačov na nami uvažovaných 12 pozíciách. Keďže sa jedná o voľbu dvojprvkovej podmnožiny z 12 pozícií, počet riešení našej rovnice a tiež počet rôznych rozdelení 10 cukríkov Jankovi, Aničke a Marošovi je

$$C(12, 2) = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = 66.$$

Takýmto výberom s možnosťou opakovania zvykneme hovoriť **zovšeobecnené kombinácie** alebo **kombinácie s opakovaním**. Je veľmi náročné rozhodnúť, či v konkrétnom prípade, ktorý máme riešiť, či sa jedná o zovšeobecnené kombinácie alebo nie. Ak sa nám však podarí úlohu preformulovať do podoby počtu celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = y,$$

pričom y je kladné celé číslo a x_i , $i = 1, 2, \dots, k$, sú nezáporné celé čísla nie väčšie ako y , tak sa jedná o zovšeobecnené kombinácie. O ich počte pojednáva nasledujúca veta.

Veta 1.6 Ak množina X obsahuje n prvkov, tak počet neusporiadaných k -prvkových výberov s možnosťou opakovania prvkov je

$$C(k + n - 1, n - 1) = C(k + n - 1, k).$$

Dôkaz vety by sme vykonali obdobným spôsobom, ako sme riešili príklad 1.10, iba namiesto presných hodnôt by sme uvažovali parametre k a n .

V príklade 1.10 nezáležalo na poradí, ktoré z detí dostalo cukríky ako prvé, resp. druhé či tretie. Rozhodujúci bol počet pridelených cukríkov jednotlivým deťom. Sú však situácie, keď na poradí záleží.

Príklad 1.11 Koľko existuje šesťmiestnych telefónnych čísel, ktoré neobsahujú číslice 0, 1, ani 8?

Riešenie. Konštruujeme telefónne číslo v šiestich po sebe nasledujúcich krokoch. V prvom kroku vyberieme číslicu na prvú pozíciu, v druhom kroku vyberieme číslicu na druhú pozíciu, atď. Keďže počet číslic, ktoré môžeme použiť pri zostrojovaní požadovaného telefónneho čísla je sedem, v každom kroku je sedem možností. Podľa princípu násobenia potom počet takýchto čísel je

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6.$$

Veta 1.7 Ak množina X obsahuje n prvkov, tak počet usporiadaných k -prvkových výberov s možnosťou opakovania prvkov je

$$V'(n, k) = n^k.$$

Takéto usporiadané výbery s možnosťou opakovania prvkov zvykneme nazývať **zovšeobecnené variácie**, alebo **variácie s opakovaním**.

1.5 Binomické koeficienty a binomické identity

Na otázku, či algebraický výraz $(a + b)^n$ nejako súvisí s kombinatorikou, by sme asi odpovedali záporne. Avšak, ako uvidíme, vzorec pre rozvoj výrazu $(a + b)^n$ je možné pomerne jednoducho získať pomocou doterajších znalostí z kombinatoriky.

Keďže

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b) \cdot (a + b) \cdots (a + b)}_n,$$

po roznásobení dostaneme súčty výrazov, v ktorých mocniny a -čiek sú násobené mocninami b -čiek a tieto sčítavame. Ukážeme si to najprv na jednoduchom príklade pre $n = 3$. Dostávame

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)(a + b) \\ &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

Je iba jedna možnosť pre výber a -čka z každej zátvorky, takže a^3 sa v rozvoji nachádza iba raz. Podobne je to s výrazom b^3 . Výber dvoch a -čiek je možný z prvých dvoch zátvoriek, z druhých dvoch zátvoriek, alebo z prvej a tretej, teda vyberáme dve zátvorky z troch a tých možností je $C(3, 2) = 3$. Podobne je to pre výber dvoch b -čiek. Takže, ak berieme do úvahy, z koľkých zátvoriek vyberáme b -čko (výber a -čiek z ostatných), máme

$$(a + b)^3 = C(3, 0) a^3 + C(3, 1) a^2 b + C(3, 2) a b^2 + C(3, 3) b^3.$$

Podobnú úvahu môžeme zopakovať pre ľubovoľné n . Súčin $a^{n-k} b^k$ výberom b -čka z k zátvoriek a výberom a -čka z ostatných $n - k$ zátvoriek. Takýchto rôznych výberov je $C(n, k)$. Po úprave teda máme

$$(a + b)^n = C(n, 0) a^n b^0 + C(n, 1) a^{n-1} b^1 + \dots + C(n, k) a^{n-k} b^k + \dots \\ + C(n, n-1) a^1 b^{n-1} + C(n, n) a^0 b^n.$$

Tento výsledok je známy ako **binomická veta**.

Veta 1.8 *Nech a a b sú reálne čísla a nech n je kladné celé číslo. Potom*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) a^{n-k} b^k.$$

Vďaka tejto vete čísla $C(n, k) = \binom{n}{k}$ nazývame aj **binomické koeficienty**. Dôkaz binomickej vety vyplýva z predchádzajúcej úvahy. Existujú samozrejme aj iné dôkazy tejto vety, napríklad pomocou matematickej indukcie.

Často sa hodnoty binomických koeficientov určujú z takzvaného **Pascalovho trojuholníka** (Obr. 1.1). Všimnime si, že v každom riadku prvá a posledná hodnota je číslo 1. Pre každú inú hodnotu platí, že je súčtom dvoch susedných hodnôt nad ňou. To, že takto usporiadané čísla do trojuholníka naozaj predstavujú hodnoty binomických koeficientov vyplýva z nasledujúceho vzťahu známeho ako **Pascalova identita**.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & \cdot & & & \cdot & & & \cdot & & \\ & & \cdot & & & \cdot & & & \cdot & & \\ & & & \cdot & & & \cdot & & & \cdot & \end{array}$$

Obr. 1.1

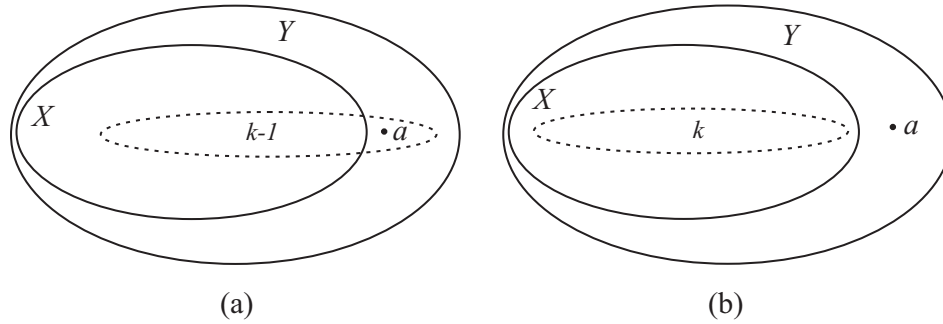
Veta 1.9 (Pascalova identita) *Nech n a k sú prirodzené čísla. Pre $1 \leq k \leq n$ platí*

$$C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k).$$

Dôkaz. Nech X je množina obsahujúca n prvkov. Uvažujme prvok $a \notin X$ a množinu $Y = X \cup \{a\}$. Potom množina Y obsahuje $n+1$ prvkov.

Uvažujme najprv výber k prvkov z množiny Y bez ohľadu na to, či prvok a vyberieme alebo nie. Počet rôznych k -prvkových výberov z $(n+1)$ -prvkovej množiny Y je v tomto prípade $C(n+1, k)$.

Iný postup dostaneme, ak berieme do úvahy, či sme vybrali prvok a alebo nie. Ak prvok a vyberieme, tak vyberáme zvyšných $k-1$ prvkov iba z množiny X , ktorá má n prvkov. Počet takých rôznych výberov je $C(n, k-1)$, pozri Obr. 1.2(a). Ak však prvok a nevyberieme, tak všetky prvky vyberáme z množiny X a takých možností je $C(n, k)$, ako to znázorňuje Obr. 1.2(b).



Obr. 1.2

Keďže oba postupy sú rovnocenné, platí rovnosť

$$C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k).$$

□

Pascalovu identitu môžeme zapísať aj pomocou kombinačných čísel takto:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Priamym dôsledkom takejto rovnosti je Pascalov trojuholník. Prvý riadok odpovedá výrazu $(a+b)^0 = 1$. V riadku pre koeficienty rozvoja výrazu $(a+b)^n$ sú kombinačné čísla od $\binom{n}{0}$ až po $\binom{n}{n}$. V nasledujúcom riadku pre rozvoj výrazu $(a+b)^{n+1}$ je číslo $\binom{n+1}{k}$ umiestnené v strede pod číslami $\binom{n}{k-1}$ a $\binom{n}{k}$ takto:

$$\binom{n}{0} \binom{n}{1} \cdots \binom{n}{k-1} \binom{n}{k} \cdots \binom{n}{n-1} \binom{n}{n}$$

$$\binom{n+1}{k}$$

To nás oprávňuje zapísať príslušnú hodnotu v Pascalovom trojuholníku na Obr. 1.1 ako súčet čísel nad touto počítanou hodnotou o riadok vyššie.

Podobných identít, ako je Pascalova identita, je v kombinatorike veľa. Z niektorými z nich sa stretneme neskôr.

Príklad 1.12 Ukážte, že platí rovnosť

$$\sum_{k=0}^n C(n, k) = 2^n.$$

Riešenie. Výraz na ľavej strane rovnosti je podobný ako je zápis binomickej vety

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) a^{n-k} b^k,$$

avšak chýba výraz $a^{n-k}b^k$. Ak si uvedomíme, že $a^{n-k}b^k = 1$ pre $a = b = 1$, tak z binomickej vety dostávame

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n C(n, k).$$

1.6 Dirichletov princíp

Dirichletov princíp, alebo **princíp holubníka**, sa trochu líši od kombinatorických princípov, ktorým sme sa venovali v predchádzajúcich paragrafoch. Na rozdiel od nich neurčuje počet nejakých možností, ale odpovedá na otázku, či je možná skutočnosť, na ktorú sa pýtame. Odpovedá teda iba áno, resp. nie, nedáva nám ani návod, ako je možné to, načo sa pýtame, dosiahnuť. Uvedieme tri verzie tohto princípu.

Najjednoduchšia verzia je nenáročná na pochopenie a nepracuje s matematickými pojmami. Položme si otázku, či je možné rozmiestniť n holubov do k kliebok, pričom počet kliebok je menší ako počet holubov tak, aby neexistovala klietka s viac holubmi. Bez veľkej matematiky vieme odpovedať, že to nie je možné. Prečo? No, ak by to bolo možné, tak v každej klietke by bol najviac ak jeden holub. Potom ale, keďže holubov je viac ako kliebok, po obsadení všetkých kliebok by nám ešte ostal aspoň jeden neumiestnený holub. Zhrňme to do nasledovnej formulácie.

Dirichletov princíp - 1. verzia

Ak n je počet holubov a k je počet kliebok, pričom $k < n$, tak po rozmiestnení všetkých holubov do kliebok aspoň v jednej klietke sú aspoň dva holuby.

Poznamenajme, že tento princíp nehovorí nič o tom, ako nájsť kľetku, v ktorej je viac holubov. Iba zabezpečuje existenciu takejto kľetky. Takto voľne formulovaný princíp je jednoduchý na pochopenie. Jeho nasledujúca formulácia je matematicky oveľa serióznejšia.

Dirichletov princíp - 2. verzia

Ak f je funkcia z konečnej množiny X do konečnej množiny Y a $|X| > |Y|$, tak pre nejaké $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ je $f(x_1) = f(x_2)$.

Táto verzia odpovedá 1. verzii Dirichletovho princípu, ak X je množina holubov a Y je množina kľetok a funkcia f každému holubovi priradí kľetku, do ktorej je umiestnený. To znamená, že funkcia f aspoň dvom rôznym holubom $x_1, x_2 \in X$, priradí tú istú funkčnú hodnotu, teda kľetku, z množiny Y .

Dirichletov princíp - 3. verzia

Veta 1.10 *Nech f je funkcia z konečnej množiny X do konečnej množiny Y . Nech $|X| = n$ a nech $|Y| = m$. Nech $k = \lceil \frac{n}{m} \rceil$. Potom existuje aspoň k hodnôt $a_1, a_2, \dots, a_k \in X$ takých, že*

$$f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_k).$$

Dôkaz. Dôkaz vykonáme sporom. Nech $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Predpokladajme, že tvrdenie vety nie je pravdivé. V takom prípade pre každé $i = 1, 2, \dots, m$ existuje najviac ak $k-1$ prvkov $x \in X$ takých, že $f(x) = y_i$. To ale znamená, že definičný obor hodnôt funkcie f obsahuje najviac ak $m(k-1)$ hodnôt, teda že $|X| < m(k-1)$.

Z predpokladu $k = \lceil \frac{n}{m} \rceil$ vyplýva, že $k-1 < \frac{n}{m}$. Potom

$$m(k-1) < m \frac{n}{m} = n,$$

čo je v spore s tým, že $|X| = n$. Pravdivé je teda tvrdenie, že existuje aspoň k hodnôt $a_1, a_2, \dots, a_k$ takých, že

$$f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_k).$$

□

Príklad 1.13 Ukážte, že ak sa stretne šesť ľudí, tak tam buď bude trojica, v ktorej sa navzájom všetci poznajú, alebo tam bude trojica taká, že žiadni dvaja z nej sa nepoznajú.

Riešenie. Nech $P_1, P_2, \dots, P_6$ je šestica, o ktorú sa zaujíname. Pre každú z dvojíc

$$\{P_1, P_2\}, \{P_1, P_3\}, \{P_1, P_4\}, \{P_1, P_5\}, \{P_1, P_6\}$$

je pravdivá jedna z odpovedí *poznajú sa*, resp. *nepoznajú sa*. Nech X je množina uvažovaných piatich dvojíc $\{P_1, P_2\}, \{P_1, P_3\}, \{P_1, P_4\}, \{P_1, P_5\}, \{P_1, P_6\}$ a nech $Y = \{A, N\}$, pričom A znamená odpoveď *poznajú sa* a N znamená odpoveď *nepoznajú sa*. Nech f je funkcia z X do Y . Potom podľa vety 1.10 aspoň $\lceil \frac{5}{2} \rceil = 3$ dvojiciam z množiny X je priradená rovnaká hodnota z množiny Y , teda rovnaká odpoveď.

Uvažujme, že rovnaká odpoveď je priradená trom dvojiciam

$$\{P_1, P_i\}, \{P_1, P_j\}, \{P_1, P_k\}.$$

Mech je to odpoveď *poznajú sa*. Ak sa pozná aspoň jedna z dvojíc

$$\{P_i, P_j\}, \{P_i, P_k\}, \{P_j, P_k\},$$

tak táto dvojica spolu s P_1 tvorí trojicu, v ktorej sa všetci navzájom poznajú. V opačnom prípade máme trojicu P_i, P_j, P_k , v ktorej sa žiadna dvojica nepozná. Podobne postupujeme, ak odpoveď pre všetky tri dvojice

$$\{P_1, P_i\}, \{P_1, P_j\}, \{P_1, P_k\}.$$

je *nepoznajú sa*.

1.7 úlohy

- 1.1. Nech $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Vytvorte
 - a) všetky permutácie prvkov tejto množiny,
 - b) všetky permutácie týchto prvkov, ktoré končia číslom 3,
 - c) všetky permutácie čísel množiny, v ktorých čísla 2 a 3 sú spolu v tomto poradí,
 - d) všetky permutácie čísel množiny, v ktorých čísla 2 a 3 sú vedľa seba.
- 1.2. Koľko existuje binárnych reťazcov dĺžky 12, ktoré
 - a) obsahujú práve jednu jedničku,
 - b) obsahujú aspoň jednu jedničku,
 - c) obsahujú práve tri jedničky,
 - d) obsahujú najviac tri jedničky,
 - e) obsahujú aspoň tri jedničky,
 - f) obsahujú rovnaký počet jedničiek a núl?
- 1.3. Koľko existuje permutácií z písmen A, B, C, D, E, F, ktoré
 - a) obsahujú konfiguráciu CDE,
 - b) obsahujú konfiguráciu BECF,
 - c) obsahujú konfigurácie BA a CE,
 - d) neobsahujú konfiguráciu DE?

- 1.4. Anglická abeceda má 21 spoluhlások a 5 samohlások. Koľko reťazcov dĺžky 6 môžeme zostrojiť nad touto abecedou tak, aby
- a) obsahovali práve jednu samohlásku,
 - b) obsahovali práve tri samohlásky,
 - c) neobsahovali viac ako jednu samohlásku,
 - d) obsahovali maximálne tri samohlásky?
- 1.5. Koľko rôznych postupností pozostávajúcich z piatich znakov je možné vytvoriť z množiny troch znakov, ak sa znaky môžu opakovať?
- 1.6. Koľko je možných rôznych výberov piatich prvkov do postupnosti, ak vyberáme z päťprvkovej množiny a prvky sa môžu opakovať?
- 1.7. Koľko existuje reťazcov pozostávajúcich zo šiestich rôznych písmen?
- 1.8. Koľko existuje 8-bitových reťazcov, ktoré
- a) začínajú konfiguráciou 1100...,
 - b) začínajú jedničkou,
 - c) na druhej alebo štvrtej pozícii majú jedničku,
 - d) na druhej aj štvrtej pozícii majú jedničku,
 - e) obsahujú práve jednu jedničku,
 - f) obsahujú práve dve jedničky,
 - g) obsahujú aspoň jednu jedničku?
- 1.9. Koľko členov má rozvoj výrazu

$$(x + y)(a + b + c)(e + f + g)(h + i) ?$$

- 1.10. Určte koeficient člena $x^4y^2z^5$ z rozvoja $(x + y + z)^{11}$.
- 1.11. Koľko existuje rôznych výberov piatich kariet zo sady 52 kariet (4 farby po 13 kariet), ak požadujeme, aby vo výbere boli karty práva dvoch farieb?
- 1.12. Koľko existuje rôznych výberov päťice po sebe idúcich kariet tej istej farby, ak vyberáme zo sady 52 kariet a požadujeme, aby
- a) eso mohlo byť umiestnené iba za kráľom, nie pred dvojkou,
 - b) eso mohlo byť umiestnené tak pred dvojkou, ako aj za kráľom, ale nie medzi nimi,
 - c) eso mohlo byť umiestnené aj medzi dvojkou a kráľom (t.j. vyhovuje ktorákolvek päťica po sebe idúcich kariet bez "roztrhnutia")?
- 1.13. Koľko existuje možností pre zoskupenie $2n$ ľudí do n dvojíc?

1.14. Pomocou binomickej vety ukážte, že

$$\sum_{k=0}^n 2^k C(n, k) = 3^n.$$

1.15. Dokážte platnosť identity

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

1.16. Dokážte platnosť identity

$$\binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k}.$$

1.17 Pomocou binomickej vety rozviňte výraz $(2c - 3d)^5$.

1.18 Určte koeficienty pri nasledujúcich členoch v príslušných rozvojoch:

- a) $x^7 y^4$ pre rozvoj $(x + y)^{11}$,
- b) $x^6 y^6$ pre rozvoj $(2x - y)^{12}$,
- c) $x^2 y^3 z^5$ pre rozvoj $(x + y + z)^{10}$,
- d) $a^3 x^4$ pre rozvoj $(a + \sqrt{ax} + x)^2 (a + x)^5$.

1.19 Ku riadku

1 7 21 35 35 21 7 1

napíšte nasledujúci riadok Pascalovho trojuholníka.

1.20 Pomocou binomickej vety dokážte platnosť rovnosti

$$0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k C(n, k).$$

1.21 Zdôvodnite platnosť rovnosti

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}.$$

1.22 Ukážte, že ak z 10 párov topánok náhodne zvolíme 11, tak medzi vybranými topánkami je aspoň jedna dvojica, ktorá tvorí pôvodný pár topánok.

Kapitola 2

Inklúzia a exklúzia

2.1 Mohutnosť zjednotenia množín

Ak konečné množiny sú disjunktné a poznáme počty prvkov v jednotlivých množinách, tak odpovedať na otázku koľko prvkov je v zjednotení tých množín je ľahké. Jednoducho spočítame počty prvkov v týchto množinách. Platí teda

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Oveľa zložitejšie je na takto postavenú otázku odpovedať, ak príslušné množiny majú neprázdne prieniky.

Príklad 2.1 Koľko je celých čísel od 1 do 90 vrátane jedničky a deväťdesiatky, ktoré sú deliteľné číslom štyri alebo číslom päť?

Riešenie. Vzhľadom na to, že množina všetkých čísel, o ktorých máme rozhodovať, nie je veľmi početná, má 90 prvkov, môžeme o každom čísle rozhodnúť, či vyhovuje našej požiadavke, alebo nie. Tento postup však nie je možný pri veľmi početných množinách. Vyriešime teda príklad všeobecne tak, ako by sme postupovali aj pri väčších množinách.

Nech A je množina všetkých čísel od 1 do 90, ktoré sú deliteľné číslom štyri. Podobne nech B je množina tých čísel od 1 do 90, ktoré sú deliteľné číslom päť. Je zrejmé, že potom $A \cup B$ je množina tých čísel od 1 do 90, ktoré sú deliteľné číslom štyri alebo číslom päť. Zaujímá nás teda počet prvkov množiny $A \cup B$. Pre počty prvkov v množinách A a B platí

$$|A| = \left\lfloor \frac{90}{4} \right\rfloor = 22 \quad \text{a} \quad |B| = \left\lfloor \frac{90}{5} \right\rfloor = 18,$$

pričom symbol $\lfloor x \rfloor$ predstavuje najväčšie celé číslo nie väčšie ako číslo x . Je to *celá časť* z čísla x . V množine celých čísel od 1 do 90 sú však aj čísla, ktoré sú deliteľné

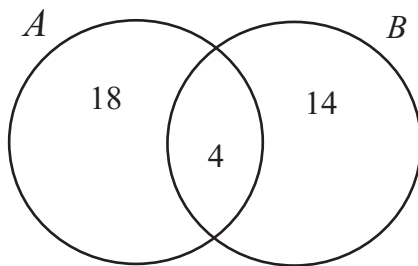
štvorkou aj päťkou. Tie sú v tomto prípade číslami množiny $A \cap B$ a platí

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{90}{4 \cdot 5} \right\rfloor = 4.$$

Ak teda sčítame počty čísel v A a v B , tak sme čísla patriace do A aj do B započítali dvakrát. Pre počet prvkov množiny $A \cup B$ teda dostávame

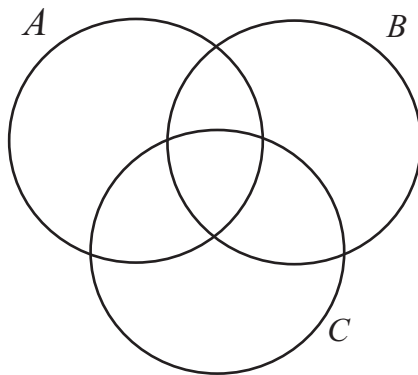
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 22 + 18 - 4 = 36.$$

Schématicky túto situáciu znázorňuje obrázok 2.1.



Obr. 2.1

Vo všeobecnosti sa zaujímame o to, koľko je prvkov v zjednotení konečného počtu množín. Metóda, ktorou sa to rieši sa nazýva **princíp inklúzie a exklúzie**. Predtým, ako sformulujeme jeho všeobecný tvar, uvažujme situáciu pre tri množiny A , B a C . Všeobecnú situáciu pre vzťah týchto množín znázorňuje Vennov diagram na obrázku 2.2.



Obr. 2.2

Ak sme spočítali mohutnosti jednotlivých množín, tak sme prvky z prieniku množín A a B započítali dvakrát. To isté platí pre prvky patriace do $A \cap C$ a tiež pre prvky v $B \cap C$. Je zrejmé, že ak chceme každý prvok z množiny $A \cup B \cup C$ započítať iba raz, tak počty prvkov z prienikov $A \cap B$, $A \cap C$ a $B \cap C$ musíme od čísla $|A| + |B| + |C|$

odčítateľ. Teraz si však môžeme všimnúť, že prvky z prieniku všetkých troch množín sme započítali trikrát do $|A|+|B|+|C|$, ale aj odpočítali trikrát v prienikoch dvojíc. To znamená, že prvky z $A \cap B \cap C$ je nutné ešte raz pripočítať. Takto započítame každý prvok zjednotenia množín $A \cup B \cup C$ práve raz. Dostávame

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Veta 2.1 *Nech $A_1, A_2, \dots, A_n$ sú konečné množiny. Potom*

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots \\ &\dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

2.2 Použitie princípu inklúzie a exklúzie

Princíp inklúzie a exklúzie je použiteľný pri riešení mnohých úloh, hoci na prvý pohľad nevyzerajú, že by sa jednalo o počet prvkov v zjednotení nejakých množín. Napríklad pri určení počtu prvočísel menších ako nejaké zvolené celé číslo. Skôr ako si uvedieme niekoľko vybraných úloh, pri riešení ktorých je vhodné použiť princípu inklúzie a exklúzie, uvedieme formuláciu tohto princípu v inom, často užitočnejšom, tvare.

2.3 Alternatívny tvar princípu inklúzie a exklúzie

Tvar princípu inklúzie a exklúzie, ktorý teraz sformulujeme, je používaný v úlohách, v ktorých nás zaujíma počet prvkov, ktoré nemajú žiadnu z nejakej skupiny vymenovaných vlastností.

Uvažujme n vlastností $P_1, P_2, \dots, P_n$. Nech pre $i = 1, 2, \dots, n$ je A_i podmnožina množiny A obsahujúca iba tie prvky z A , ktoré majú vlastnosť P_i . Nech $N(P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_k})$ je počet takých prvkov, ktoré majú všetky z vlastností $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}$. To znamená, že

$$N(P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_k}) = |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$

Symbolom N označme počet všetkých uvažovaných prvkov, t.j. $N = |A|$. Počet takých prvkov z množiny A , ktoré nemajú ani jednu z vlastností $P_1, P_2, \dots, P_n$ označme symbolom $N(P'_1 P'_2 \dots P'_n)$. Potom zrejme platí

$$N(P'_1 P'_2 \dots P'_n) = N - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|.$$

Ak teraz počet prvkov v množine $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ vyjadríme pomocou princípu inklúzie a exklúzie, dostávame, že

$$\begin{aligned} N(P'_1 P'_2 \dots P'_n) &= N - \sum_{1 \leq i \leq n} N(P_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(P_i P_j) \\ &- \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(P_i P_j P_k) + \dots + (-1)^n N(P_1 P_2 \dots P_n). \end{aligned}$$

Nasledujúce príklady predstavuje typickú situáciu, kedy je vhodné pri riešení použiť alternatívny tvar princípu inklúzie a exklúzie. Najprv uvedieme príklad, spôsob riešenia ktorého využijeme v príklade po ňom.

Príklad 2.2 Koľko existuje rôznych riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29,$$

ak

- a) každé x_i , $i = 1, 2, 3, 4$, je nezáporné celé číslo,
- b) každé x_i , $i = 1, 2, 3, 4$, je celé číslo a navyše $x_1 > 0$, $x_2 > 1$, $x_3 > 2$ a $x_4 \geq 0$.

Riešenie. Riešenie prípadu a) je podobné ako riešenie príkladu 1.10. To znamená, že predpokladáme výber 29 jedničiek a tri oddeľovače. Ak berieme do úvahy formuláciu vety 1.6, tak môžeme povedať, že vyberáme 29 prvkov z množiny $\{1_1, 1_2, 1_3, 1_4\}$, pričom každý prvok 1_i predstavuje jedničku. Potom x_i je číslo rovné počtu vybraných jedničiek typu 1_i . Na základe tvrdenia vety 1.6 potom počet všetkých riešení úlohy pre prípad a) je

$$C(29 + 4 - 1, 4 - 1) = C(32, 3) = 4960.$$

Riešenie úlohy po b) je trochu komplikovanejšie. Vo výbere prvkov z množiny $\{1_1, 1_2, 1_3, 1_4\}$ musí byť aspoň jeden prvok 1_1 , aspoň dva prvky 1_2 a aspoň tri prvky 1_3 . To znamená, že šesť prvkov do počtu 29 je už jasných a ľubovoľne zo štvorprvkovej množiny $\{1_1, 1_2, 1_3, 1_4\}$ vyberáme už iba 23 prvkov. Veta 1.6 vraví, že počet takých výberov je

$$C(23 + 4 - 1, 4 - 1) = C(26, 3) = 2600.$$

To znamená, že aj počet riešení rovnice zo zadania pre prípad b) je $C(26, 3) = 2600$.

Príklad 2.3 Koľko existuje rôznych riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21,$$

ak každé x_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, je nezáporné celé číslo a navyše $x_1 \leq 9$, $x_2 \leq 12$, $x_3 \leq 10$ a $x_5 \leq 11$.

Riešenie. Podobne ako v príklade 2.2 máme obmedzenia pre hodnoty x_i , avšak tentokrát sú prípustné hodnoty riešení ohraničené zhora. Preto nie je možné jednoducho zopakovať postup z príkladu 2.2. Čo však je možné riešiť podobne, sú opačné nerovnosti pre hodnoty x_i , než sú určené v zadani príkladu. Toto budeme formulovať pomocou vlastností, ktoré naše neznáme x_i majú mať.

Nech vlastnosť P_1 znamená, že číslo x_1 je aspoň 10, t.j. $x_1 \geq 10$. Podobne nech vlastnosť P_2 znamená, že $x_2 \geq 13$, P_3 znamená, že $x_3 \geq 11$ a nakoniec vlastnosť P_4 žiada $x_4 \geq 12$. Podľa alternatívneho tvaru princípu inklúzie a exklúzie je počet riešení našej rovnice s podmienkami $x_1 \leq 9$, $x_2 \leq 12$, $x_3 \leq 10$ a $x_5 \leq 11$ rovný číslu

$$\begin{aligned} N(P'_1 P'_2 P'_3 P'_4) = & N - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) - N(P_4) + N(P_1 P_2) + N(P_1 P_3) \\ & + N(P_1 P_4) + N(P_2 P_3) + N(P_2 P_4) + N(P_3 P_4) - N(P_1 P_2 P_3) - N(P_1 P_2 P_4) \\ & - N(P_1 P_3 P_4) - N(P_2 P_3 P_4) + N(P_1 P_2 P_3 P_4). \end{aligned}$$

Na výpočet čísel potrebných na pravej strane tejto rovnosti použijeme rovnaký postup ako v príklade 2.2 po b).

- N je počet všetkých riešení bez podmienok pre jednotlivé x_i , teda $N = C(21 + 5 - 1, 5 - 1) = C(24, 4) = 25\,300$.
- $N(P_1)$ je počet riešení s podmienkou $x_1 \geq 10$, čo znamená, že $N(P_1) = C(11 + 5 - 1, 5 - 1) = C(15, 4) = 2\,730$.
- $N(P_2)$ je počet riešení s podmienkou $x_2 \geq 13$, a preto dostávame $N(P_2) = C(8 + 5 - 1, 5 - 1) = C(12, 4) = 990$.
- $N(P_3)$ je počet riešení s podmienkou $x_3 \geq 11$, čo znamená, že $N(P_3) = C(10 + 5 - 1, 5 - 1) = C(14, 4) = 2\,002$.
- $N(P_4)$ je počet riešení s podmienkou $x_5 \geq 12$ a $N(P_4) = C(9 + 5 - 1, 5 - 1) = C(13, 4) = 1\,430$.
- $N(P_1 P_2)$ je počet riešení s podmienkami $x_1 \geq 10$ a $x_2 \geq 13$, teda $N(P_1 P_2) = C(-2 + 5 - 1, 5 - 1) = C(2, 4) = 0$.
- $N(P_1 P_3)$ je počet riešení s podmienkami $x_1 \geq 10$ a $x_3 \geq 11$, teda $N(P_1 P_3) = C(0 + 5 - 1, 5 - 1) = C(4, 4) = 1$.
- $N(P_1 P_4)$ je počet riešení s podmienkami $x_1 \geq 10$ a $x_4 \geq 12$, teda $N(P_1 P_4) = C(-1 + 5 - 1, 5 - 1) = C(3, 4) = 0$.

Ak si uvedomíme, že okrem podmienok $x_1 \geq 10$ a $x_3 \geq 11$, všetky ostatné dvojice, tretice aj štvorice podmienok v súčte prevyšujú hodnotu 21, čo je pravá strana našej rovnice, tak je z predchádzajúceho postupu jasné, že $N(P_2P_3) = N(P_2P_4) = N(P_3P_4) = 0$ a tiež $N(P_iP_jP_k) = 0$ pre všetky $1 \leq i < j < k \leq 4$. Samozrejme aj $N(P_1P_2P_3P_4) = 0$.

Dosadením príslušných čísel teda dostávame

$$N(P'_1P'_2P'_3P'_4) = 25\,300 - 2\,730 - 990 - 2\,002 - 1\,430 + 0 + 1 + 0 + \dots + 0 = 18\,143.$$

Počet prvočísel do určitej hodnoty.

V tomto odseku ukážeme, ako sa dá princíp inklúzie a exklúzie v modifikovanom tvare vhodne využiť pri určovaní počtu prvočísel, ktoré neprekročia určitú dopredu zvolenú hodnotu. Ako je známe, prvočíslo je kladné celé číslo, ktoré má práve štyroch celočíselných deliteľov. Tak napríklad číslo 7 je prvočíslo, lebo je bez zvyšku deliteľné iba číslami 1, -1 , 7 a -7 . Číslo 1 nie je prvočíslo, pretože bez zvyšku ho delia iba dve čísla a to 1 a -1 . Číslo 2 je najmenším prvočíslo a je zároveň aj jediným párnym prvočíslo. Kladné celé číslo väčšie ako 1 je zloženým číslom, ak nie je prvočíslo. Dá sa vyjadriť ako súčin prvočísel. To znamená, že zložené číslo je deliteľné nejakým prvočíslo, ktoré nie je väčšie ako hodnota jeho druhej odmocniny. V opačnom prípade by totiž toto zložené číslo bolo súčinom prvočísel z ktorých súčin každej dvojice by bol väčší, ako uvažované zložené číslo.

Príklad 2.4 Koľko je prvočísel nie väčších ako 100?

Riešenie. Z predchádzajúceho odseku je zrejmé, že zložené číslo menšie alebo rovné 100 musí mať prvočíselného deliteľa, ktorého hodnota neprekročí 10, t.j. musí byť deliteľné niektorým z čísel 2, 3, 5 a 7. Nech vlastnosť P_1 znamená, že celé kladné číslo je deliteľné jedničkou, P_2 znamená, že je deliteľné dvojkou, P_3 nech znamená, že je deliteľné číslom 5 a konečne vlastnosť P_4 nech znamená, že zložené číslo je deliteľné číslom 7. Potom

$$N(P'_1P'_2P'_3P'_4)$$

je počet takých čísel od 1 do 100, ktoré nie sú deliteľné ani jedným z čísel 2, 3, 5 a 7. Sú to teda všetky prvočísla v intervale od 10 do 100 a číslo 1. Vzhľadom na to, že číslo 1 nie je prvočíslo, tak ho nechceme zarátat. Preto uvažujeme iba čísla v intervale od 2 do 100 a celkový počet nami uvažovaných čísel je $N = 99$. Prvočísla v intervale od 2 do 9 tam zarátané nie sú, pretože každé z nich delí seba. To znamená, že počet prvočísel od 2 do 100 je

$$4 + N(P'_1P'_2P'_3P'_4).$$

Potom podľa modifikovaného princípu inklúzie a exklúzie máme

$$\begin{aligned}
 N(P'_1 P'_2 P'_3 P'_4) &= N - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) - N(P_4) + N(P_1 P_2) + N(P_1 P_3) \\
 &\quad + N(P_1 P_4) + N(P_2 P_3) + N(P_2 P_4) + N(P_3 P_4) - N(P_1 P_2 P_3) - N(P_1 P_2 P_4) \\
 &\quad - N(P_1 P_3 P_4) - N(P_2 P_3 P_4) + N(P_1 P_2 P_3 P_4) \\
 &= 99 - \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 7} \right\rfloor \\
 &\quad + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5 \cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right\rfloor \\
 &\quad + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor \\
 &= 99 - 50 - 33 - 20 - 14 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 - 4 - 2 - 1 - 0 + 0 = 21.
 \end{aligned}$$

Dostávame, že počet všetkých prvočísel neprevyšujúcich hodnotu 100 je

$$4 + N(P'_1 P'_2 P'_4 P'_4) = 4 + 21 = 25.$$

Počet surjektívnych zobrazení.

Zobrazenie f množiny A do množiny B je predpis, ktorý každému prvku množiny A priradí práve jeden prvok z množiny B . Zapisujeme to symbolom $f : A \rightarrow B$.

Zobrazenie $f : A \rightarrow B$ je *injektívne*, ak dva rôzne prvky množiny A sa vždy zobrazia na rôzne prvky množiny B , t.j.

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Zobrazenie $f : A \rightarrow B$ je *surjektívne*, ak každý prvok množiny B je obrazom nejakého prvku množiny A , t.j.

$$\forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x).$$

Zobrazenie je *bijektívne*, ak je injektívne aj surjektívne zároveň.

Veta 2.2 *Nech m, n sú prirodzené čísla, $m \geq n$. Potom existuje*

$$n^m - C(n, 1)(n-1)^m + C(n, 2)(n-2)^m - \dots + (-1)^{n-1} C(n, n-1)1^m$$

rôznych surjektívnych zobrazení m -prvkovej množiny na n -prvkovú množinu.

2.4 úlohy

- 2.1. Koľko prvkov je v zjednotení $A_1 \cup A_2$, ak A_1 obsahuje 12 prvkov, A_2 obsahuje 18 prvkov a platí
- a) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$?
 - b) $|A_1 \cap A_2| = 1$?
 - c) $|A_1 \cap A_2| = 6$?
 - d) $A_1 \subset A_2$?
- 2.2 Na fakulte je 345 študentov, ktorí majú zapísanú matematickú analýzu, 212 študentov, ktorí majú zapísanú diskretnú matematiku a 188 študentov, ktorí majú zapísanú matematickú analýzu aj diskretnú matematiku. Koľko je na fakulte takých študentov, ktorí majú zapísaný aspoň jeden z predmetov matematická analýza a diskretná matematika?
- 2.3 Určte počet prvkov v zjednotení množín $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, ak v každej množine je 100 prvkov a ak
- a) množiny sú po dvojiciach disjunktné.
 - b) každá dvojica množín má 50 spoločných prvkov, ale ani jeden prvok sa nenachádza vo všetkých troch.
 - c) každá dvojica množín má 50 spoločných prvkov a 25 prvkov je takých, že sú vo všetkých troch množinách.
 - d) množiny sú rovnaké.
- 2.4 Určte počet kladných celých čísel nie väčších ako 1 000, ktoré sú druhou alebo treťou mocninou nejakého celého kladného čísla.

Kapitola 3

Neorientované grafy

3.1 Definícia a základné typy grafov

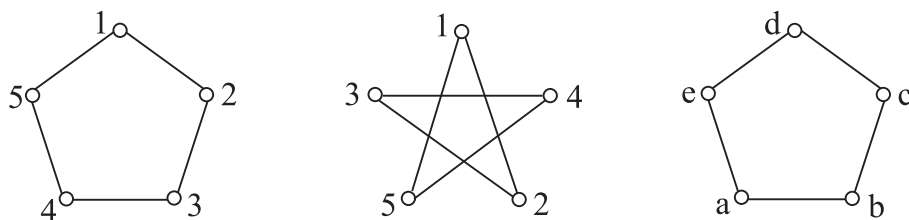
Teória grafov je pomerne mladá matematická disciplína, aj keď prvá práca z teórie grafov, Eulerovo pojednanie o mostoch mesta Kráľovca (dnešný Kaliningrad), je z roku 1736. Prudký rozvoj teórie grafov nastal až v druhej polovici 20. storočia v súvislosti s rozvojom počítačov a veľkými požiadavkami na algoritmizáciu rôznych úloh. V tomto učebnom texte sa oboznámime so stručnými základmi neorientovaných a orientovaných grafov a s niektorými ich aplikáciami v elektrotechnike ako aj pri algoritmickom riešení rôznych úloh z praxe.

Definícia 3.1 Graf G je usporiadaná dvojica (V, H) , kde V je nejaká neprázdna množina a H je množina dvojprvkových podmnožín množiny V . Prvky množiny V nazývame **vrcholy** grafu G a prvky množiny H nazývame **hrany** grafu.

V našom texte budeme uvažovať grafy s konečnou množinou vrcholov. Ak chceme zdôrazniť, že graf má množinu vrcholov V a množinu hrán H , píšeme $G = (V, H)$. Ak hovoríme o nejakom známom grafe G , jeho množinu vrcholov označujeme $V(G)$, podobne množinu hrán grafu G označujeme $H(G)$.

Graf je teda rýdzo kombinatorický objekt, ktorý dáva do vzájomných vzťahov prvky dvoch množín. Zdôrazňujeme to preto, že postupne sa budeme vyjadrovať dosť obrazne a grafy znázorňovať kreslením do roviny. Vrcholom grafu sa priradia body roviny (vyznačené krúžkami) a hrany sa vyjadrujú spojením príslušných dvojíc bodov rovnými alebo zakrivenými čiarami. Takému znázorneniu grafu budeme hovoriť **diagram grafu**. Pozor, dva rôzne grafy môžu mať rovnaký diagram a naopak, ten istý graf sa dá znázorniť pomocou dosť nepodobných „obrázkov“.

Príklad 3.1 Na obr. 3.1 sú dva rôzne diagramy grafu $G_1 = (V_1, H_1)$, kde $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $H_1 = \{\{1, 2\}\{2, 3\}\{3, 4\}\{4, 5\}\{1, 5\}\}$ a diagram grafu $G_2 = (V_2, H_2)$, kde $V_2 = \{a, b, c, d, e\}$ a $H_2 = \{\{a, b\}\{b, c\}\{c, d\}\{d, e\}\{e, a\}\}$.



Obr. 3.1

Budeme hovoriť, že hrana $\{u, v\}$ **inciduje** s vrcholmi u a v (v diagrame sú vrcholy u a v spojené čiarou). Tiež sa dá povedať, že vrchol inciduje s hranou. Dva vrcholy sa nazývajú **susedné**, ak incidujú s tou istou hranou, dve hrany nazývame **susedné**, ak incidujú s tým istým vrcholom.

Uvedieme si niekoľko typov grafov, ktoré sa často využívajú, a preto dostali špeciálne pomenovania:

Kompletný graf na $n \geq 1$ vrchoch je graf $K_n = (V, H)$, kde $|V| = n$ a H obsahuje všetky dvojprvkové podmnožiny vrcholovej množiny (v diagrame je spojená hranou každá dvojica vrcholov).

Kompletný bipartitný graf $K_{m,n} = (V, H)$, kde $m, n \geq 1$, je graf, v ktorom

$$V = \{u_1, \dots, u_m\} \cup \{v_1, \dots, v_n\}, \quad H = \{\{u_i, v_j\}; i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Kružnica dĺžky $n \geq 1$ je graf $C_n = (V, H)$, kde

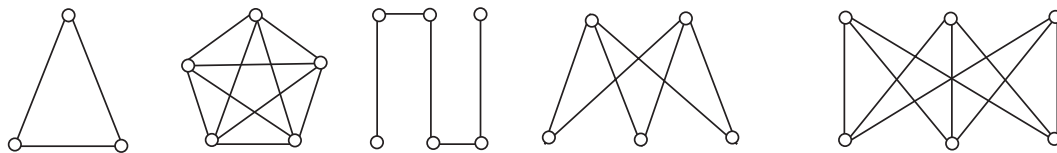
$$V = \{1, 2, \dots, n\}, \quad H = \{\{i, i+1\}; i = 1, \dots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\}.$$

Cesta dĺžky $n \geq 0$ je graf $P_n = (V, H)$, kde

$$V = \{0, 1, \dots, n\}, \quad H = \{\{i-1, i\}; i = 1, \dots, n\}.$$

Komplement grafu $G = (V, H)$ je graf $\overline{G} = (V, H')$, kde H' obsahuje všetky hrany chýbajúce v grafe G k tomu, aby bol kompletným grafom, pričom $H \cup H' = \emptyset$.

Kružnica C_5 je na obr. 3.1. Na obr. 3.2 sú postupne grafy: K_3 , K_5 , P_5 , $K_{2,3}$ a $K_{3,3}$.



Obr. 3.2

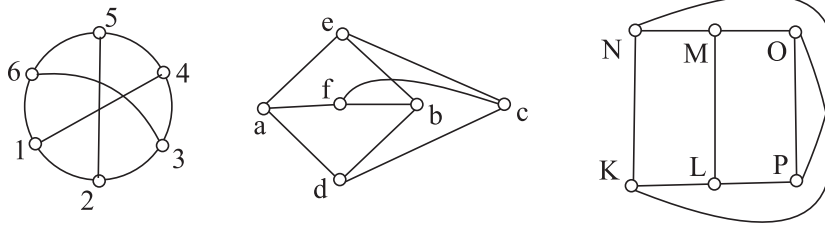
Dva grafy G a G' považujeme za rovnaké, ak majú totožné množiny vrcholov a hrán, teda $G = G'$ znamená, že $V(G) = V(G')$ a $E(G) = E(G')$. Mnoho grafov sa však líši iba označením svojich vrcholov a hrán. Toto vystihuje pojem *izomorfizmus*.

Definícia 3.2 Dva grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ sa nazývajú **izomorfné**, ak existuje bijektívne zobrazenie $f : V \rightarrow V'$ také že pre všetky $u, v \in V$:

$$\{u, v\} \in E \quad \text{práve keď} \quad \{f(u), f(v)\} \in E',$$

Zobrazenie f nazývame **izomorfizmus** grafov G a G' . Fakt, že grafy G a G' sú izomorfné zapisujeme $G \cong G'$.

Príklad 3.2 Na obr. 3.3 sú diagramy troch izomorfných grafov. Nájdite príslušné izomorfizmy.



Obr. 3.3

Riešenie. Jeden z izomorfizmov medzi prvým a druhým grafom je napríklad

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & d & b & e & c & f \end{pmatrix}.$$

Existuje viac možností. Zvyšok ponecháme na čitateľa. Všetky tri grafy sú izomorfné s grafom $K_{3,3}$.

Z definície 3.2 vyplýva, že pre dva izomorfne grafy $G_1 = (V_1, H_1)$ a $G_2 = (V_2, H_2)$ platí

$$|V_1| = |V_2|, \quad |H_1| = |H_2|.$$

Je zrejmé, že splnenie týchto dvoch podmienok ešte nezaručuje, že nejaké dva grafy sú izomorfné.

Definícia 3.3 Hovoríme, že graf G_1 je **podgrafom** grafu G , ak $V(G_1) \subset V(G)$ a $H(G_1) \subset H(G)$. Zapisujeme to: $G_1 \subset G$.

Definícia 3.4 Podgraf $G' = (V, H')$ grafu $G = (V, H)$ nazývame **faktor** grafu G .

Faktor grafu je teda taký podgraf, ktorý obsahuje všetky vrcholy daného grafu. Rôzne faktory sa môžu líšiť nielen počtom hrán, ale aj rôznym zložením hranových množín.

3.2 Stupne vrcholov, súvislosť a metrika

Definícia 3.5 *Nech G je graf a v jeho vrchol. Symbolom $\delta_G(v)$ označme počet hrán incidujúcich s vrcholom v . číslo $\delta_G(v)$ nazývame **stupeň vrcholu** v v grafe G . Ak $\delta_G(v) = 0$, vrchol v nazývame **izolovaný vrchol**.*

Ak nemôže dôjsť k zámene, tak index G v $\delta_G(v)$ vynechávame. Graf nemôže mať úplne ľubovoľné stupne vrcholov. Maximálny stupeň (označuje sa symbolom $\Delta(G)$) v grafe s n vrcholmi je $n - 1$ a minimálny 0.

Veta 3.1 *Pre každý graf $G = (V, H)$ platí*

$$\sum_{v \in V} \delta_G(v) = 2|H|.$$

Je to zrejmé, pretože každá hrana inciduje s dvoma vrcholmi a keď spočítavame stupne vrcholov, tak každú hranu zarátame dvakrát. Z tejto vety vyplýva dôležitý dôsledok.

Dôsledok 3.2 *Počet vrcholov s nepárny stupňom je v každom grafe číslo párne.*

Ak má graf všetky vrcholy rovnakého stupňa k , nazývame ho **pravidelným grafom stupňa k** . Je zrejmé, že kompletný graf K_n je pravidelným grafom stupňa $n - 1$. Z dôsledku je zrejmé, že pravidelný graf nepárneho stupňa nemôže mať nepárny počet vrcholov.

Nech pre danú dvojicu vrcholov u a v v grafe $G = (V, H)$ existuje postupnosť vrcholov a hrán

$$v_0, h_1, v_1, h_2, v_2, \dots, v_{n-1}, h_n, v_n,$$

kde $v_i \in V$ pre $i = 0, 1, 2, \dots, n$, pričom $v_0 = u$, $v_n = v$ a $h_{i+1} = \{v_i, v_{i+1}\}$ pre $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Takúto postupnosť nazývame **sledom** dĺžky n medzi vrcholmi u a v . Ak $u = v$ ($u \neq v$), tak sled je **uzavretý (otvorený)**. Obvykle na určenie sledu zapisujeme iba postupnosť vrcholov, teda $v_0 v_1 v_2 \dots v_n$.

Všimnime si, že pre sled sme nepožadovali aby vrcholy (hrany) boli rôzne. Preto medzi dvojicou vrcholov grafu buď existuje nekonečne veľa sledov, alebo neexistuje žiadny. Sledy môžeme rozdeliť na nasledujúce typy:

Ľah je sled, v ktorom sú všetky hrany rôzne.

Cesta je ľah, v ktorom sú všetky vrcholy (a tým aj hrany) rôzne. Cestu dĺžky n (počet jej hrán) označujeme P_n .

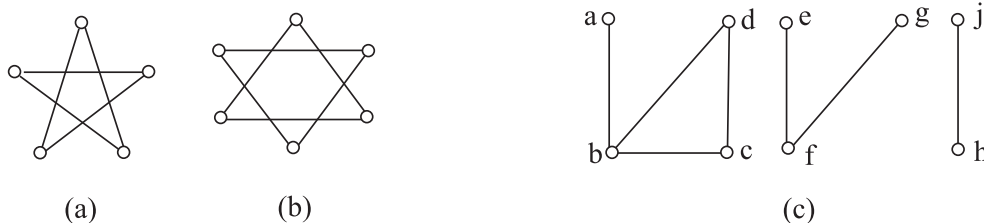
Kružnica je uzavretá cesta dĺžky aspoň 3. Kružnica C_n dĺžky n má práve n vrcholov. (Všimnite si, že už skôr sme zaviedli ten istý pojem iným spôsobom.)

Je zrejmé, že z každého sledu S medzi vrcholmi u a v grafu G môžeme vybrať cestu, ktorá spája tieto vrcholy.

Definícia 3.6 *Hovoríme, že graf G je súvislý, ak pre každé dva jeho vrcholy u a v existuje v ňom sled (cesta) z u do v . Graf, ktorý nie je súvislý, sa nazýva nesúvislý.*

Ak v nejakom grafe G zvolíme vrchol v , môžeme sa zaujímať o všetky vrcholy, do ktorých sa dá dostať po sledoch začínajúcich vo vrchole v . Tieto vrcholy a hrany, ktoré s nimi incidujú, tvoria súvislý podgraf grafu G , ktorý nazývame *komponent* grafu obsahujúci vrchol v . Presnejšia definícia je:

Definícia 3.7 *Komponent grafu je každý jeho maximálny súvislý podgraf (t.j. taký súvislý podgraf, ktorý nie je vlastným podgrafom iného súvislého podgrafu grafu G).*



Obr. 3.4

Na obr. 3.5(a) je príklad súvislého grafu, zatiaľčo na obr. 3.5(b) je príklad nesúvislého grafu. Na obr. 3.5(c) je nesúvislý graf s tromi komponentmi. Jeho podgraf pozostávajúci z troch vrcholov a, b, d a z dvoch hrán $\{a, b\}$ a $\{b, d\}$ nie je komponentom, hoci jeho diagram vyzerá rovnako ako diagram komponentu s vrcholmi e, f, g . Je totiž vlastným podgrafom komponentu so štyrmi vrcholmi a, b, c, d .

Súvislý graf má iba jeden komponent. Rozhodnúť, či graf je súvislý, poprípade nájsť všetky jeho komponenty, nie je ťažké, hoci z diagramu to nemusí byť vždy na prvý pohľad zrejmé. Súvislosť grafu je typická globálna vlastnosť grafu. Niekedy sa však o nej dá rozhodnúť na základe lokálnych vlastností grafu, teda z vlastností bezprostredného okolia jednotlivých vrcholov a hrán.

Veta 3.3 *Nech $G = (V, H)$, $|V| = n$, je graf, v ktorom súčet stupňov ľubovoľnej dvojice nesusedných vrcholov je aspoň $n - 1$. Potom graf G je súvislý.*

Veta 3.4 *Nech $G = (V, H)$, $|V| \geq 2$, je súvislý graf. Potom v grafe G existujú aspoň dva vrcholy také, že vynechaním ľubovoľného z nich sa súvislosť neporuší.*

Artikulácia je vrchol grafu, ktorý ak z grafu vynecháme (aj hrany, ktoré s ním incidujú), poruší sa súvislosť grafu (v nesúvislom grafe sa zväčší počet komponentov). Hranu s tou istou vlastnosťou nazývame **most**.

Veta 3.5 *Nech $G = (V, H)$ je konečný súvislý graf s n vrcholmi. Potom platí*

$$n - 1 \leq |H| \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Predstavme si cestnú sieť mesta vyjadrenú grafom. Je namieste pýtať sa na najkratšiu dopravnú trasu pre jazdu autom z miesta A do miesta B . Takéto a podobné úvahy vedú k zavedeniu pojmu vzdialenosti v grafe.

Definícia 3.8 *Nech $G = (V, H)$ je súvislý graf. Vzdialenosť $d(u, v)$ vrcholov u, v grafu G je dĺžka najkratšej cesty spájajúcej vrcholy u a v .*

Na vzdialenosť v grafe sa môžeme pozeráť ako na zobrazenie $d : V \times V \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, ktoré má nasledujúce vlastnosti:

1. $d(u, v) \geq 0$; $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$,
2. $d(u, v) = d(v, u)$,
3. $d(u, v) \leq d(u, z) + d(z, v)$ pre všetky $z \in V$.

Tieto vlastnosti sú axiómy metriky, preto usporiadaná dvojica (V, d) je metrický priestor. Pritom V je vrcholová množina grafu a d je metrika – vzdialenosť vrcholov v grafe. Uvedené vlastnosti sa pri izomorfizme zachovávajú, preto sú užitočné aj pojmy, ktoré sú definované pomocou metriky. Nasledujúca definícia uvádza niektoré u nich.

Definícia 3.9 *Nech $G = (V, H)$ je súvislý graf.*

Exentricita vrcholu $u \in V$ je číslo

$$e(u, G) = \max_{v \in V} d(u, v).$$

Priemer grafu G je číslo

$$P(G) = \max_{v \in V} e(v, G).$$

Polomer grafu G je číslo

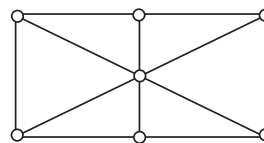
$$r(G) = \min_{v \in V} e(v, G).$$

Stred grafu G je množina vrcholov, ktorých exentricita je rovná polomeru.

Poznámka. Priemer grafu G môžeme definovať aj vzťahom

$$P(G) = \max_{u, v \in V} d(u, v).$$

Pre grafy neplatí obdoba vzťahu medzi priemerom a polomerom z geometrickej kružnice. Napríklad pre graf, ktorého diagram je na obr. 3.5 je $P(G) = r(G) = 2$ a stred je celá vrcholová množina. Všimnime si podrobnejšie vzájomný vzťah priemeru a polomeru toho istého grafu.



Obr. 3.5

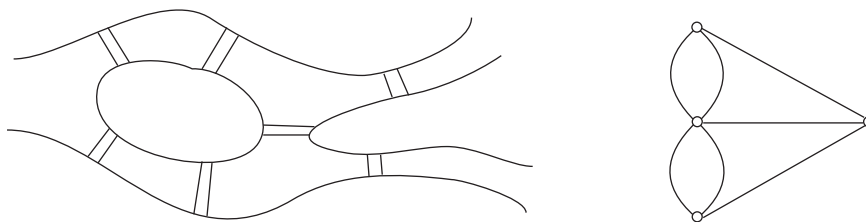
Veta 3.6 *Nech $G = (V, H)$ je súvislý graf. Potom platí*

$$r(G) \leq P(G) \leq 2r(G).$$

3.3 Eulerovkosť, hamiltonovkosť a planárnosť

V 18. storočí bolo mesto Königsberg (dnes Kaliningrad) rozdelené ramenami rieky Pregel na štyri časti. Tieto boli pospájané siedmimi mostami tak, ako je naznačené na obr. 3.6 vľavo. Obyvatelia mesta riešili nasledovný problém: Je možné vyjsť z domu, urobiť okružnú prechádzku po meste tak, aby bol každý most prejdený práve raz a vrátiť sa domov? V tom čase v meste pôsobil L. Euler a ten problém vyriešil. Každú pevninu nahradil vrcholom grafu a mosty spájajúce odpovedajúce pevniny nahradil hranami. Dostal tak graf s násobnými hranami, ktorý je znázornený na obr. 3.6 vpravo. V grafovej terminológii je teda daná úloha formulovaná nasledovne: *Dá sa nakresliť diagram daného grafu $G = (V, H)$ jedným uzavretým ťahom bez zdvihnutia ceruzky z papiera tak, aby sme po žiadnej hrane neprechádzali viackrát?* Euler podal úplné riešenie úlohy pre ľubovoľný graf.

Pojmy a vlastnosti, ktoré si uvedieme v tomto paragrafe, sa využívajú pri riešeníach praktických úloh za pomoci teórie grafov.



Obr. 3.6

Matematicky môžeme úlohu sformulovať takto: Dá sa v grafe nájsť uzavretý sled, v ktorom sa každá hrana vyskytuje práve raz? Taký sled nazývame **uzavretým eulerovským ťahom**. Graf je **eulerovský** práve vtedy, keď obsahuje aspoň jeden uzavretý eulerovský ťah. Hovoríme tiež, že graf sa dá **pokryť** uzavretým ťahom. Dá sa ukázať, že eulerovské grafy môžeme jednoznačne charakterizovať bez toho, aby sme hovorili o ťahoch. Platí nasledujúca veta.

Veta 3.7 (Charakteristika eulerovských grafov.) *Graf je eulerovský práve vtedy, ak je súvislý a každý jeho vrchol má párny stupeň.*

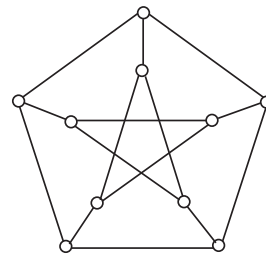
Ak graf nie je eulerovský, často nás zaujíma minimálny počet hranovo disjunktných otvorených ťahov, ktorými sa dá pokryť. Pre súvislý graf môžeme nájsť minimálne pokrytie p otvorenými ťahmi práve vtedy, ak obsahuje $2p$ ($p \geq 1$) vrcholov nepárneho stupňa. Tieto otvorené ťahy začínajú a končia vždy vo vrchoch

nepárnych stupňov. Ak je graf nesúvislý, uvažujeme každý komponent zvlášť. (Nakreslite si známy „domček“ s piatimi vrcholmi a ôsmimi hranami jedným ťahom.)

Jedna vec je vedieť, že graf je eulerovský, to sa dá ľahko zistiť, iné je uzavretý eulerovský ťah nájsť. Pri hľadaní uzavretého ťahu začneme v ľubovoľnom vrchole a po hrane s ním incidentnej prejdeme do nejakého susedného vrcholu. Použitú hranu z grafu odoberieme a postupujeme rovnakým spôsobom ďalej až sa nakoniec vrátíme do vrcholu, v ktorom sme začínali. Výber hrany je viazaný iba podmienkou, aby jej vypustením nevznikol nesúvislý graf (izolované vrcholy pripúšťame, ale štartovací vrchol sa stane izolovaným až v poslednom kroku).

Hamiltonovská kružnica v grafe G je kružnica obsahujúca všetky vrcholy grafu G . Graf nazývame **hamiltonovský**, ak obsahuje aspoň jednu hamiltonovskú kružnicu. Aby bol graf hamiltonovský, musí byť konečný, súvislý, musí obsahovať aspoň jeden vrchol a nesmie obsahovať mosty ani artikulácie. Avšak ani splnenie uvedených podmienok nezaručuje existenciu hamiltonovskej kružnice. Napríklad **Petersenov** graf na obr. 3.7 nie je hamiltonovský.

Pojem hamiltonovskej kružnice je na prvý pohľad podobný uzavretému eulerovskému ťahu: Hamiltonovská kružnica má prechádzať bez opakovania všetky vrcholy a uzavretý eulerovský ťah všetky hrany. Napriek tomu je matematická obtiažnosť oboch problémov veľmi rozdielna. Zatiaľčo uzavreté eulerovské ťahy sú ľahko zvládnuteľné, problém existencie hamiltonovskej kružnice je mimoriadne náročný a doteraz nepoznáme žiadnu jednoduchú charakteristiku hamiltonovských grafov. Tejto problematike sa venuje veľké množstvo matematikov a dosiahli obrovské množstvo čiastočných výsledkov, nie však nutnú a postačujúcu podmienku existencie hamiltonovskej kružnice. My si uvedieme dve postačujúce podmienky.



Obr. 3.7

Veta 3.8 *Nech $G = (V, H)$ je graf, $|V| = n$, $n \geq 3$. Ak stupeň každého vrcholu grafu je aspoň $\frac{n}{2}$, tak G je hamiltonovský graf.*

Veta 3.9 *Ak pre ľubovoľné dva nesusedné vrcholy u, v grafu $G = (V, H)$, $|V| = n$, $n \geq 3$, platí*

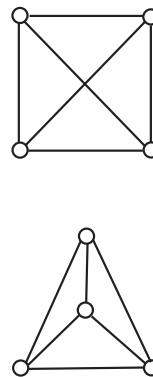
$$\delta(u) + \delta(v) \geq n,$$

tak graf G je hamiltonovský.

V diagrame Petersenovho grafu na obr. 3.7 sa niektoré hrany pretínajú. Môžeme si postaviť otázku, či je to nutné. Skúste tento diagram prekresliť. Ak neurobíte chybu, tak sa vám to bez pretínania hrán nepodarí.

Definícia 3.10 Graf $G = (V, H)$ je **planárny** (rovinný), ak jeho diagram v rovine môžeme zostrojiť tak, že dve rôzne hrany majú spoločné nanajvýš krajné vrcholy. Ak G nie je planárny, tak ho nazývame **neplanárny**.

V prípade planárneho grafu ide teda o *možnosť* nakresliť jeho diagram požadovaným spôsobom. Planárny je napríklad graf K_4 , ktorého dva diagramy sú na obr. 3.8, hoci v jednom z nich sa hrany pretínajú. Diagram bez pretínania hrán rozdeľuje rovinu na disjunktné oblasti (ak obsahuje aspoň jednu kružnicu) a tie budeme nazývať **oblasťami planárneho grafu**. Neohraničenú oblasť nazývame vonkajšia a vhodným prekreslením diagramu sa dá dosiahnuť, že vonkajšou oblasťou bude hociktorá z nich. O oblastiach nemá zmysel hovoriť, ak máme diagram s priesečníkmi. Môžeme sa však pýtať, koľko oblastí má diagram planárneho grafu, ak ho znázorníme bez pretínania hrán.



Obr. 3.8

Veta 3.10 (Eulerova veta o planárnych grafoch.) *Nech $G = (V, H)$ je súvislý planárny graf. Nech r je počet oblastí grafu G . Potom platí*

$$|H| - |V| + 2 = r.$$

Z tejto veľmi dôležitej vety môžeme odvodiť nasledujúce závery.

1. Ak $G = (V, H)$ je súvislý planárny graf, tak $|H| \leq 3|V| - 6$.
2. Ak $G = (V, H)$ je súvislý planárny graf bez trojuholníkov, tak $|H| \leq 2|V| - 4$.
3. Každý planárny graf obsahuje aspoň jeden vrchol, ktorého stupeň je menší ako šesť.
4. Grafy K_5 a $K_{3,3}$ sú neplanárne.

Uvedené grafy K_5 a $K_{3,3}$ predstavujú najmenšie neplanárne grafy. K_5 má najmenší počet vrcholov a $K_{3,3}$ najmenší počet hrán zo všetkých neplanárnych grafov. Tieto dva grafy hrajú veľmi dôležitú úlohu pri charakterizácii planárnych grafov. Uvažujme graf $G = (V, H)$ s aspoň jednou hranou. Ak z neho vynecháme hranu $\{u, v\}$ a nahradíme ju dvoma novými hranami $\{u, z\}$ a $\{z, v\}$, povieme, že nový graf vznikol **rozpoľením** hrany. Dva grafy nazveme **homeomorfné**, ak sú izomorfné, alebo vznikli postupným rozpoľovaním hrán (aspoň u jedného z nich) z toho istého grafu.

Problematiku planárnosti grafov s využitím výhradne kombinatorických vlastností, teda bez odvolávania sa na kreslenie diagramov, rieši nasledujúca elegantná veta.

Veta 3.11 (Kuratowského veta.) *Graf G je planárny práve vtedy, ak neobsahuje podgraf homeomorfný s grafom K_5 ani s grafom $K_{3,3}$.*

Príklad 3.3 V Petersenovom grafe na obr. 3.7 nájdite podgraf homeomorfný s grafom $K_{3,3}$. Tým ukážete, že nie je planárny. Môže obsahovať aj podgraf homeomorfný s K_5 ?

Problematika kreslenia diagramov grafov nie je jednoduchá, a to ani pre grafy planárne. Ak sú grafy neplanárne, ich diagramy sa dajú znázorniť len tak, že niektoré hrany sa pretínajú v nekonečných bodoch. To vedie k skúmaniu rôznych mier neplanárnosti grafov. Typickými príkladmi z praxe, kde sa tieto výsledky intenzívne využívajú sú tzv. VLSI obvody, čo sú veľmi husto integrované elektronické prvky pospájané mikrovodičmi. Rovinné siete sa pritom skladajú na seba a prepojenia, ktoré sa nedajú urobiť v rovine bez pretínania, musia sa realizovať medzi jednotlivými vrstvami. Ide pritom o minimalizáciu takých prepojení a o nahustenie čo najviac prvkov do jednej vrstvy.

3.4 úlohy

- 4.1. Zistite, či existuje konečný graf, v ktorom žiadne dva rôzne vrcholy nemajú rovnaký stupeň.
- 4.2. Je daný graf, ktorý má aspoň dva vrcholy a menej hrán ako vrcholov. Môže mať každý vrchol grafu stupeň aspoň dva?
- 4.3. Nech $\overline{G}$ je komplementárny graf ku grafu G a nech G má aspoň dva komponenty.
 - a) Aký je maximálny počet komponentov grafu $\overline{G}$?
 - b) Aký je priemer grafu $\overline{G}$?
- 4.4. Nech G_1 je súvislý faktor grafu G_2 . Musí byť graf G_2 súvislý?
- 4.5. Majme graf K_4 s označenými vrcholmi. Nájdite:
 - a) počet rôznych kružníc v grafe K_4 ,
 - b) počet rôznych faktorov grafu K_4 .
- 4.6. Zistite priemer, polomer a stred Petersenovho grafu.
- 4.7. Akým najmenším počtom ťahov sa dá nakresliť šachovnica?

Kapitola 4

Orientované grafy

4.1 Definícia digrafu

V tejto kapitole sa budeme zaoberať orientovanými grafmi. Skrátene ich budeme nazývať nazývať *digrafy*. Je to skrátka z anglického názvu *directed graph*.

Definícia 4.1 *Nech $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a nech $H \subset (V \times V) \setminus \{\{v_1, v_1\}, \{v_2, v_2\}, \dots, \{v_n, v_n\}\}$. Digraf $\vec{G}$ je usporiadaná dvojica množín $\vec{G} = (V, H)$.*

Podobne ako pri neorientovaných grafoch, V je množina vrcholov a H je množina (orientovaných) hrán. Ak hrana $h = (u, v) \in H$, nazývame vrchol u **začiatočným** a vrchol v **koncovým** vrcholom orientovanej hrany h . Hrany $h_1 = (u, v)$ a $h_2 = (v, u)$ nazývame **opačne orientovanými** hranami. Pojmy incidencie a susednosti pre vrcholy aj hrany sa používajú v tom istom význame ako pri (neorientovaných) grafoch. Podobne v rovnakých významoch sa používajú aj pojmy ako podgraf (aj keď správne by sme mali hovoriť poddigraf) a faktor.

Definícia digrafu predpokladá orientáciu všetkých hrán. Je možné si však veľmi dobre predstaviť aj taký „graf“, v ktorom sú orientované iba niektoré hrany a ostatné sú neorientované (napríklad pri znázorňovaní dopravnej situácie v nejakom meste, kde sú jednosmerné aj obojsmerné ulice). My budeme v tomto texte uvažovať iba digrafy so všetkými orientovanými hranami.

Definícia 4.2 *Dva digrafy $\vec{G}_1 = (V_1, H_1)$ a $\vec{G}_2 = (V_2, H_2)$ sa nazývajú **izomorfné**, ak existuje bijektívne zobrazenie $f : V_1 \rightarrow V_2$ také že pre všetky $u, v \in V_1$:*

$$(u, v) \in H_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in H_2.$$

*Zobrazenie f nazývame **izomorfizmom** digrafov $\vec{G}_1$ a $\vec{G}_2$. Zapisujeme $\vec{G}_1 \cong \vec{G}_2$.*

Definícia 4.3 *Nech $\vec{G} = (V, H)$ je digraf. Označme $\delta^+(v)$, resp $\delta^-(v)$ počet hrán, ktorých vrchol v je začiatočným, resp. koncovým vrcholom. číslo $\delta^+(v)$, resp. $\delta^-(v)$ nazývame **vonkajší**, resp. **vnútorný stupeň** vrcholu v .*

Nech $G = (V, H)$ vznikne z $\vec{G} = (V, H)$ zrušením orientácie. Potom pre každý vrchol $v \in V$ platí

$$\delta^+(v) + \delta^-(v) = \delta(v).$$

Dá sa dokázať, že pre vrcholy a hrany digrafu $\vec{G} = (V, H)$ platí (pozri vetu 4.1)

$$\sum_{v \in V} \delta^+(v) = \sum_{v \in V} \delta^-(v) = |H|.$$

V mnohých prípadoch sa ukazuje výhodné zaviesť špeciálne názvy pre vrcholy digrafu $\vec{G} = (V, H)$. Nech $v \in V$, potom ak:

$\delta^+(v) = \delta^-(v),$	tak v je rovnovážny vrchol,
$\delta^+(v) > 0, \quad \delta^-(v) = 0,$	tak v je prameň ,
$\delta^+(v) = 0, \quad \delta^-(v) > 0,$	tak v je ústie ,
$\delta^+(v) > \delta^-(v) > 0,$	tak v je zosilňovač ,
$0 < \delta^+(v) < \delta^-(v),$	tak v je zoslabovač .

4.2 Súvislosť a silná súvislosť

Možnosť prechodu od digrafu ku grafu prostredníctvom zrušenia orientácie hrán využijeme na definovanie nasledujúcich pojmov:

Sled v digrafe $\vec{G}$ je postupnosť vrcholov a hrán v $\vec{G}$, ktorá po zrušení orientácie je sledom v G . Dĺžka sledu je počet jeho hrán.

Spojenie v $\vec{G}$ je taký sled v $\vec{G}$, v ktorom je zachovaná orientácia hrán od začiatočného vrcholu ku koncovému.

Orientovaný ťah v $\vec{G}$ je také spojenie v $\vec{G}$, ktoré po zrušení orientácie je ťahom v G (neopakujú sa hrany).

Dráha v $\vec{G}$ je také spojenie v $\vec{G}$, ktoré po zrušení orientácie je cestou v G (neopakujú sa vrcholy). Dĺžka dráhy je rovná počtu jej hrán.

Cyklus v $\vec{G}$ je uzavretá dráha. Počet jej vrcholov (hrán) je dĺžka cyklu.

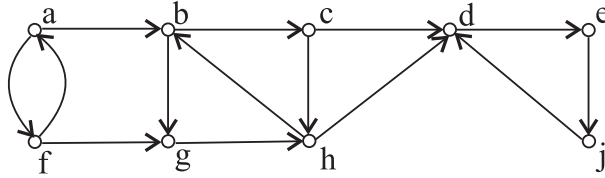
Poznámka. V digrafe $\vec{G}$ môžeme tiež hovoriť o pojmoch ťah, cesta, kružnica. Sú to také sledy v digrafe $\vec{G}$, z ktorých po zrušení orientácie dostaneme ťah, cestu, kružnicu v grafe G . Nezáleží teda v nich na orientácií hrán.

Pozrime sa teraz na pojem súvislosti digrafu $\vec{G}$. Budeme rozlišovať dva druhy, a to: súvislosť a silnú súvislosť. Definícia súvislosti je totožná s definíciou súvislosti v (neorientovanom) grafe. Digraf je teda **súvislý**, ak medzi jeho ľubovoľnou dvojicou vrcholov existuje sled. Môžeme to vyjadriť aj takto: Digraf $\vec{G}$ je súvislý, ak je súvislý graf G , ktorý vznikol zrušením orientácie v $\vec{G}$.

Nech $\vec{G} = (V, H)$ je súvislý digraf. Pod **vzdialenosťou** $\vec{d}(u, v)$ z vrcholu u do vrcholu v rozumieme dĺžku nminimálnej dráhy z u do v . Ak neexistuje dráha z u do v , tak $\vec{d}(u, v) = \infty$.

Definícia 4.4 Digraf $\vec{G} = (V, H)$ je **silne súvislý**, ak pre ľubovoľné dva vrcholy $u, v \in V$ existuje spojenie z u do v aj spojenie z v do u . **Silným komponentom** digrafu $\vec{G}$ nazývame každý jeho maximálny silne súvislý poddigraf.

Príklad 4.1 Na obr. 4.1 je diagram digrafu, ktorý je súvislý, ale nie je silne súvislý. Neexistuje spojenie napríklad z vrcholu d do vrcholu b . Digraf obsahuje tri silné komponenty, a to: $\vec{G}_1 = (V_1, H_1)$, $\vec{G}_2 = (V_2, H_2)$ a $\vec{G}_3 = (V_3, H_3)$, pričom $V_1 = \{a, f\}$, $H_1 = \{(a, f), (f, a)\}$, $V_2 = \{b, c, g, h\}$, $H_2 = \{(b, c), (c, h), (h, b), (g, h), (b, g)\}$, $V_3 = \{d, e, j\}$ a $H_3 = \{(d, e), (e, j), (j, d)\}$. Ak by sme pridali k tomuto digrafu hranu so začiatočným vrcholom v množine V_3 a koncovým v množine V_1 , takt získaný digraf by bol silne súvislý.



Obr. 4.1

Veta 4.1 Pre digraf $\vec{G} = (V, H)$ sú nasledujúce tri tvrdenia ekvivalentné:

- $\vec{G}$ je silne súvislý.
- $\vec{G}$ je súvislý a každá jeho hrana sa vyskytuje aspoň v jednom cykle.
- Pre ľubovoľný rozklad $\{V_1, V_2\}$ vrcholovej množiny V existujú hrany h_1, h_2 také, že h_1 má začiatočný vrchol vo V_1 a koncový vo V_2 a h_2 má začiatočný vrchol vo V_2 a koncový vo V_1 .

Poznámka. Výraz, že tvrdenia a), b) a c) sú ekvivalentné znamená: a) platí práve vtedy, ak platí b), b) platí práve vtedy, ak platí c) a a) platí práve vtedy, ak platí c). Ak by sme chceli urobiť dôkaz vety, stačí nám dokazovať tri implikácie, a to: $a) \Rightarrow b)$, $b) \Rightarrow c)$ a $c) \Rightarrow a)$.

Veta 4.2 Nech $\vec{G} = (V, H)$ je súvislý digraf, v ktorom pre každý vrchol $v \in V$ platí $\delta^+(v) = 1$. Potom $\vec{G}$ obsahuje jediný cyklus.

Ak v Digrafe $\vec{G}$ zmeníme orientáciu každej hrany na opačnú, získame **opačne orientovaný** digraf $\vec{G}^-$. Zrejme v $\vec{G}^-$ sa oproti $\vec{G}$ navzájom vymenia vonkajšie a vnútorné stupne všetkých vrcholov, všetky spojenia a cykly zmenia svoju orientáciu. Z toho vyplýva, že tvrdenie vety 4.2 bude platiť aj v prípade, že pre každý vrchol $v \in V$ predpokladáme $\delta^-(v) = 1$.

V predchádzajúcej kapitole sme sa zoznámili s eulerovskými a hamiltonovskými grafmi. Väčšina vlastností týchto grafov sa dá preformulovať aj pre digrafy. Digraf

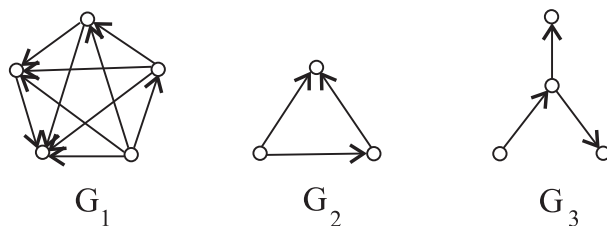
nazveme eulerovský, ak sa dá hranovo pokryť uzavretým orientovaným ťahom. Dá sa ukázať, že digraf je eulerovský práve vtedy, ak je súvislý a každý jeho vrchol je rovnovážny. Podobne môžeme hovoriť o hamiltonovských cykloch, sú to cykly, ktoré obsahujú všetky vrcholy digrafu. Digraf je hamiltonovský, ak obsahuje aspoň jeden hamiltonovský cyklus.

4.3 Acyklické digrafy

Z doteraz uvedených vlastností digrafov je vidieť, že cykly hrajú v digrafoch veľmi dôležitú úlohu. Ovpływujú silnú súvislosť, rozklad na silné komponenty a majú zásadný vplyv na možnosti vytvárania rôznych spojení s digrafe. Je napríklad zrejmé, že pri zisťovaní povahy všetkých možných výpočtov, ktoré môžu prebiehať podľa zadaného vývojového diagramu, bude situácia oveľa jednoduchšia, ak nepripustíme cykly. Teraz preberieme iba základné vlastností, ktoré budeme potrebovať pri aplikačnom využití digrafov.

Definícia 4.5 Digraf $\vec{G} = (V, H)$, ktorý neobsahuje cyklus, nazývame **acyklický digraf**.

Na obr. 4.2 sú diagramy troch acyklických digrafov $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ a $\vec{G}_3$.



Obr. 4.2

Ak $\vec{G} = (V, H)$ je acyklický digraf, je zrejmé, že aj každý jeho poddigraf je acyklický. Otázku existencie prameňa a ústia rieši nasledujúca veta.

Veta 4.3 Nech $\vec{G} = (V, H)$, kde $H \neq \emptyset$, je konečný acyklický digraf. Potom v $\vec{G}$ existuje aspoň jeden vrchol $v \in V$, pre ktorý je $\delta^+(v) > 0$ a $\delta^-(v) = 0$.

Nasledujúca veta je nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby digraf bol acyklický. Využíva sa napríklad pri označovaní vrcholov tzv. sieťových grafov, ktorými sa riešia veľké projekty pozostávajúce z mnohých rôzne navzájom súvisiacich úloh.

Veta 4.4 Digraf $\vec{G} = (V, H)$ je acyklickým digrafom práve vtedy, ak môžeme jeho vrcholy označiť číslami $1, 2, \dots, |V|$ tak, že každá hrana (i, j) spĺňa podmienku $i < j$.

Kapitola 5

Grafové algoritmy

5.1 Minimálne cesty a spojenia

V tejto kapitole uvedieme niektoré typické úlohy z praxe, pri riešení ktorých sa významne využíva teória grafov. Zároveň v niektorých prípadoch uvedieme aj známe algoritmy na ich riešenie alebo aspoň vhodné heuristicke postupy. Algoritmy budeme považovať za *rýchly*, ak je možné počet krokov, ktoré algoritmus pri výpočte vykoná, ohraničiť konštantným násobkom polynomiálnej funkcie. Ak je algoritmus rýchly, tak so zväčšovaním vstupu algoritmu je nárast času na jeho úspešné ukončenie „zvládnuteľný“ rýchlejším počítačom. V opačnom prípade hovoríme, že algoritmus nie je efektívny. Záujemcov o presnejšiu charakteristiku rýchlosti práce algoritmov odkazujeme na knihy: J. Plesník, *Grafové algoritmy*, resp. L. Kučera, *Kombinatorické algoritmy* zo zoznamu literatúry v závere.

Jednou zo základných úloh v teórii grafov je nájsť najkratšiu cestu medzi dvoma vrcholmi grafu. Taká požiadavka sa vyskytuje v mnohých praktických aplikáciách (napríklad pri hľadaní najkratšieho dopravného spojenia). V takých grafoch sa hrany označujú číslami, ktorých význam je rôzny a záleží od toho, aká úloha sa daným grafom rieši.

Majme graf $G = (V, H)$, $|V| = n$. Nech $\mathbb{R}^+$ je množina kladných reálnych čísel. Zobrazenie $f : H \rightarrow \mathbb{R}^+$ nazývame **hranovým ohodnotením** grafu G . Pre každú hranu $\{v_i, v_j\} \in H$ číslo $w_{ij} = f(\{v_i, v_j\}) \in \mathbb{R}^+$ nazývame **ohodnotením hrany** $\{v_i, v_j\}$.

Podobne definujeme hranové ohodnotenie aj pre digrafy, iba namiesto neorientovaných hrán $\{v_i, v_j\}$ uvažujeme orientované hrany (v_i, v_j) .

Dĺžka minimálnej cesty

Predstavme si, že súvislý hranovo ohodnotený graf predstavuje nejakú cestnú sieť, v ktorej vrcholy odpovedajú mestám a križovatkám a hodnoty hrán odpo-

vedajú vzdialenostiam medzi bodmi reprezentovanými vrcholmi. V závislosti od typu úlohy ohodnotenia hrán môžu predstavovať aj čas alebo náklady na prepravu z jedného miesta na druhé. V takom grafe chceme nájsť najvýhodnejšie „spojenia“.

Nech S je cesta z vrcholu v_i do vrcholu v_j v ohodnotenom grafe G . Súčet ohodnotení hrán cesty S nazveme **dĺžkou cesty** S . Pre dva vrcholy v_i a v_j potom minimálnu z dĺžok ciest medzi v_i a v_j nazveme **dĺžkou minimálnej cesty** a označíme symbolom $d_w(v_i, v_j)$.

Pri riešení úloh súvisiacich so vzdialenosťou sa najčastejšie stretávame s nasledujúcimi variantmi:

1. pre dané dva vrcholy u, v ohodnoteného grafu určiť vzdialenosť medzi u a v ,
2. pre daný vrchol u určiť vzdialenosti z u do každého vrcholu ohodnoteného grafu,
3. určiť vzdialenosti medzi všetkými dvojicami vrcholov ohodnoteného grafu.

Vzhľadom na to, že úloha číslo 1 je obsiahnutá v 2. a 3. úlohe, obmedzíme sa na algoritmické riešenia 2. a 3. úlohy. Pre tento prípad (neorientovaný graf) uvedieme **Dijkstrov algoritmus**, ktorý rieši 2. úlohu. Riešenie 3. úlohy si ukážeme neskôr pre digraf.

Vstupom Dijkstrovho algoritmu je hranovo ohodnotený graf $G = (V, H)$ a začiatkový vrchol a , od ktorého sa určuje dĺžka minimálnej cesty (vzdialenosť) $d_w(a, v)$ k vrcholu v pre všetky $v \in V$. Pre každý vrchol $v \in V$ sa zavádza premenná $L(v)$. Je to číslo, ktoré udáva momentálny „odhad“ dĺžky minimálnej cesty z a do v . Presnejšie, v každom momente je $d_w(a, v) \leq L(v)$, čo znamená, že v priebehu práce algoritmu sa pre niektoré vrcholy môže $L(v)$ znižovať, pre iné sa hodnota $L(v)$ už stáva pevnou a vtedy je presne rovná $d_w(a, v)$. Algoritmus pracuje ešte s premennou A , čo je množina „aktívnych“ vrcholov, teda vrcholov s premennou hodnotou $L(v)$. Na začiatku je $A = V$.

V hlavnom kroku algoritmu vyberieme z množiny vrcholov s pevnými hodnotami L vrchol v , ktorý má hodnotu $L(v)$ minimálnu, t.j. do ktorého je z vrcholu a najkratšia vzdialenosť zo všetkých už známych vzdialeností. Potom zisťujeme, či sa cez tento vrchol v môžu skrátiť doteraz známe nie pevné vzdialenosti do jeho susedov (vrcholov s ešte nie pevnou hodnotou $L(x)$) cez hrany, ktoré ich spájajú. Ak áno, príslušné vrcholy dostanú menšiu hodnotu $L(x)$.

Algoritmus určenia minimálnej cesty (Dijkstra)

Vstup: Hranovo ohodnotený graf $G = (V, H)$, počiatkový vrchol a .

Výstup: $L(x) = d_w(a, x)$ pre každý vrchol $x \in V$.

1. Polož $L(a) := 0$; $L(x) := \infty$ pre každé $x \in V \setminus \{a\}$; $A := V$.
2. Ak $A = \emptyset$, STOP.
3. Polož $v := \{y \in A; L(y) \leq L(z), z \in A\}$ (ak je viac možností, zvol'ľubovoľnú).

Polož $A := A \setminus \{v\}$.

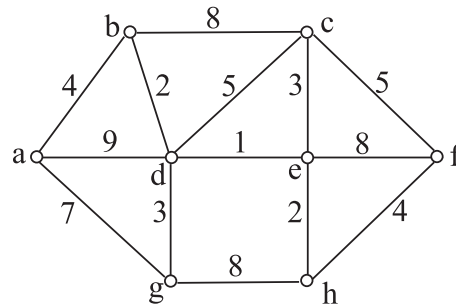
4. Pre všetky $x \in A$ také, že $\{v, x\} \in H$ polož
 $L(x) := \min\{L(x), L(v) + f(\{v, x\})\}$.
 Skok na krok 2.

Poznámka. Pri praktickom programovaní nahradíme symbol ∞ nejakou veľkou hodnotou, o ktorej máme zaručené, že bude väčšia ako dĺžka maximálnej cesty v G , napr. $M = 10^5 + \sum_{\{u,v\} \in H} f(\{u, v\})$.

Poznamenajme ešte, že algoritmus môžeme (len nahradením neorientovaných hrán $\{u, v\}$ orientovanými (u, v)) použiť aj pre digrafy.

Príklad 5.1 Zistite dĺžky minimálnych ciest z vrcholu a do všetkých vrcholov ohodnoteného grafu, ktorého diagram je na obr. 5.1.

Riešenie. Získané hodnoty $L(x)$ pri jednotlivých prechodoch cyklami (2–3–4) algoritmu sú zapísané v nasledujúcej tabuľke. Podčiarknuté hodnoty sú pri vrchoch, ktoré sme v 3. kroku zvolili za vrchol v . Sú to vlastne definitívne hodnoty $L(v) = d_w(a, v)$ pre všetky $v \in V$.



Obr. 5.1

Poznámka. Nájsť konkrétnu postupnosť vrcholov a hrán cesty s minimálnou dĺžkou z vrcholu a do zvoleného vrcholu je možné „spätným“ chodom, na ktorý je práve tabuľkový zápis priebehu výpočtu veľmi výhodný. Doporučujeme čitateľovi premyslieť si tento postup. Ide pritom vždy o nájdenie predchádzajúceho vrcholu minimálnej cesty, ak postupujeme od jej konca.

a	b	c	d	e	f	g	h
<u>0</u>	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	<u>4</u>	∞	9	∞	∞	7	∞
		12	<u>6</u>	∞	∞	7	∞
		11		7	∞	<u>7</u>	∞
		11		<u>7</u>	∞		15
		10			15		<u>9</u>
		<u>10</u>			13		
					<u>13</u>		

Dĺžka minimálneho spojenia

Uvažujme súvislý hranovo ohodnotený digraf $\vec{G} = (V, H)$, to znamená, že každej hrane (v_i, v_j) je priradené kladné reálne číslo $f((v_i, v_j)) = w_{ij}$. Nech $\vec{S}$ je spojenie z vrcholu v_i do vrcholu v_j . Súčet ohodnotení hrán spojenia $\vec{S}$ nazývame

dĺžkou spojenia $\vec{S}$. Pre dva vrcholy v_i a v_j potom minimálnu z dĺžok spojení z v_i do v_j nazveme **dĺžkou minimálneho spojenia** a označíme symbolom $\vec{d}_w(v_i, v_j)$. Ak nedôjde k nedorozumeniu, budeme skrátene hovoriť o vzdialenosti z v_i do v_j .

Na ohodnotenom digrafe si ukážeme riešenie 3. úlohy z predchádzajúcej strany, t.j. ako určiť vzdialenosti medzi všetkými dvojicami vrcholov ohodnoteného grafu. K tomu potrebujeme pojmy *cenová* a *dištančná* matica.

Definícia 5.1 *Nech $\vec{G} = (V, H)$, $|V| = n$, je hranovo ohodnotený digraf. štvorcovú maticu $\mathbf{C} = (c_{ij})$ rádu n nazývame **cenovou maticou**, ak pre jej prvky platí*

$$c_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & \text{ak } (v_i, v_j) \in H, \\ \infty, & \text{ak } (v_i, v_j) \notin H, \\ 0, & \text{ak } i = j. \end{cases}$$

Definícia 5.2 *Nech $\vec{G} = (V, H)$, $|V| = n$, je hranovo ohodnotený digraf. štvorcovú maticu $\mathbf{D} = (d_{ij})$ rádu n nazývame **dištančnou maticou**, ak pre jej prvky platí*

$$d_{ij} = \begin{cases} \vec{d}_w(v_i, v_j), & \text{ak existuje spojenie z } v_i \text{ do } v_j, \\ \infty, & \text{ak neexistuje spojenie z } v_i \text{ do } v_j, \\ 0, & \text{ak } i = j. \end{cases}$$

Cenová matica sa zo zadaného ohodnoteného digrafu získa ľahko a slúži nám na výpočet dištančnej matice (matice vzdialeností), v ktorej sú prehľadne zapísané dĺžky minimálnych spojení medzi všetkými dvojicami vrcholov. Naším cieľom je teda vypočítať dištančnú maticu. Jedným z možných postupov na jej určenie je tzv. **Floydov algoritmus**, v ktorom štartujeme z cenovej matice a postupným „umocňovaním“ získame dištančnú maticu.

Algoritmus určenia minimálneho spojenia (Floyd)

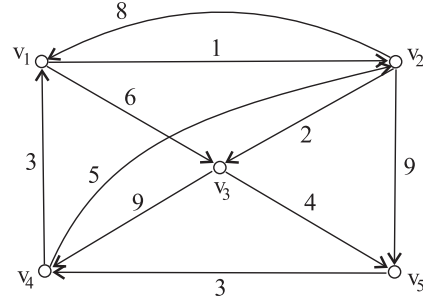
Vstup: Hranovo ohodnotený digraf $\vec{G} = (V, H)$ s vrcholmi $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Výstup: Dištančná matica $\mathbf{D} = (d_{ij})$.

1. Polož $\mathbf{D}^{(0)} := \mathbf{C}$, kde $\mathbf{C}$ je cenová matica digrafu $\vec{G}$, teda $d_{ij}^{(0)} = c_{ij}$ pre všetky $i, j = 1, 2, \dots, n$.
Polož $k := 1$.
2. Vytvor maticu $\mathbf{D}^{(k)} = d_{ij}^{(k)}$ tak, že
 $d_{ij}^{(k)} := \min\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\}$.
3. Ak $k = n$, STOP ($\mathbf{D}^{(k)} = \mathbf{D}$), inak polož $k := k + 1$.
Skok na krok 2.

Príklad 5.2 Zostrojte dištančnú maticu digrafu $\vec{G}$, ktorého diagram je na obr. 5.2.

Riešenie. Najprv napíšeme cenovú maticu $\mathbf{C}$ a položíme ju rovnú matici $\mathbf{D}^{(0)}$. Pre $k = 1$ sú v matici $\mathbf{D}^{(0)}$ prvý riadok a prvý stĺpec „pracovné“, a pre prvok $d_{ij}^{(1)}$ zostrojovanej matice $\mathbf{D}^{(1)}$ platí, že je rovný menšiemu z dvojice čísel: prvok na tej istej pozícii v matici $\mathbf{D}^{(0)}$, resp. súčet prvku v prvom riadku a j -tom stĺpci a prvku v prvom stĺpci a i -tom riadku. Podobne konštruujeme $\mathbf{D}^{(2)}, \dots, \mathbf{D}^{(5)} = \mathbf{D}$.



Obr. 5.2

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & \infty & \infty \\ 8 & 0 & 2 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 5 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{D}^{(0)}, \quad \mathbf{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & \infty & \infty \\ 8 & 0 & 2 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & \infty & 10 \\ 8 & 0 & 2 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 12 & 7 \\ 8 & 0 & 2 & 11 & 6 \\ \infty & \infty & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 12 & 7 \\ 8 & 0 & 2 & 11 & 6 \\ 12 & 13 & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^{(5)} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 10 & 7 \\ 8 & 0 & 2 & 9 & 6 \\ 10 & 11 & 0 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Floydov algoritmus sa dá bez problémov použiť aj na hľadanie dĺžky minimálnych ciest v neorientovanom grafe. Ak ho nechceme veľmi modifikovať, stačí v grafe G nahradiť každú hranu dvojicou opačne orientovaných hrán s rovnakým ohodnotením.

5.2 Minimálna kostra grafu

Kostra grafu je jeho podgraf, ktorý obsahuje všetky vrcholy, je súvislý a neobsahuje kružnicu. V neohodnotených grafoch sú rôzne kostry daného grafu v zásade rovnocenné, pretože všetky obsahujú rovnaký počet hrán. Konkrétne, každá kostra súvislého grafu $G = (V, H)$ obsahuje práve $|V| - 1$ hrán. Iná situácia nastane

v hranovo ohodnotenom grafe. V takom prípade má zmysel hľadať kostry grafu, ktoré majú extrémny (t.j. najmenší alebo najväčší) súčet ohodnotení hrán.

Majme súvislý hranovo ohodnotený graf $G = (V, H)$. Zo všetkých kostier grafu G hľadáme takú, ktorá má minimálny súčet ohodnotení všetkých jej hrán. Je zrejmé, že existuje aspoň jedna kostra $T = (V, H')$ s minimálnym súčtom ohodnotení hrán a nazveme ju **minimálnou kostrou** grafu $G = (V, H)$.

Problém určenia minimálnej kostry grafu má svoju motiváciu v praxi. Z našich matematikov sa ním ako prvý úspešne zaoberal O. Borůvka začiatkom 20. rokov minulého storočia v súvislosti s návrhom siete pre rozvod elektriny. Ďalšiu metódu riešenia navrhol v roku 1930 V. Jarník, ale základné myšlienky ich algoritmov sa všeobecne rozšírili až po zavedení počítačov. My si uvedieme dva jednoduché algoritmy a to *Primov* a *Kruskalov*. Primov je výhodnejší pri strojovom spracovaní problému, Kruskalov viac využijeme pri riešení malých úloh na cvičeniach, ak budeme riešiť úlohy, ktoré nejakým spôsobom potrebujú minimálnu kostru alebo jej modifikáciu.

I. Algoritmus určenia minimálnej kostry (Kruskal)

Vstup: Hranovo ohodnotený graf $G = (V, H)$.

Výstup: Minimálna kostra $T = (V, H')$.

1. Zostroj diskretný faktor $T = (V, \emptyset)$.
2. Zoraď hrany grafu G do neklesajúcej postupnosti vzhľadom na ich ohodnotenia.
3. Do T pridaj z neklesajúcej postupnosti prvú hranu, ktorá v T nevytvorí kružnicu, a z postupnosti hrán ju odober.
4. Ak $|H'| = |V| - 1$, STOP ($T = (V, H')$ je minimálna kostra), inak skok na krok 3.

Z popísaného algoritmu vyplýva, že ak ohodnotenia všetkých hrán sú navzájom rôzne, tak existuje jediná minimálna kostra grafu G .

II. Algoritmus určenia minimálnej kostry (Prim)

Vstup: Hranovo ohodnotený graf $G = (V, H)$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Výstup: Minimálna kostra $T = (V(T), H'(T))$.

1. Polož $T := (V(T), H'(T))$, $V(T) := \{v_1\}$, $H'(T) := \emptyset$.
2. Ak $|V(T)| = n$, STOP (T je minimálna kostra).
3. Pre $v_i \in V(T)$ a $v_j \in V(G) \setminus V(T)$ zvoľ hranu $\{v_i, v_j\}$ s minimálnym ohodnotením.

Polož $V(T) := V(T) \cup \{v_j\}$, $H'(T) := H'(T) \cup \{v_i, v_j\}$.

(Ak je viac hrán $\{v_i, v_j\}$ s rovnakým minimálnym ohodnotením, z nich majú najprv prednosť hrany s najmenším i a potom s najmenším j).

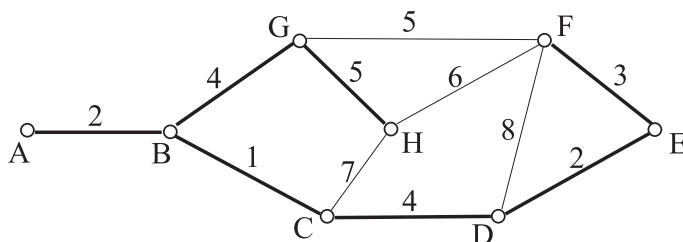
Skok na krok 2.

Poznámka. V prípade existencie viacerých minimálnych kostier grafu pri postupe podľa Kruskalovho algoritmu môžeme získať ktorúkoľvek z nich. Primov algoritmus produkuje vždy jediná kosť, ktorá je určená očíslovaním vrcholov.

Príklad 5.3 Predpokladajme, že máme plán okresu, v ktorom existuje určitá sieť ciest prvej triedy. Je potrebné v zimnom období zabezpečiť dopravu tak, aby:

- ľubovoľné dve obce boli spojené zjazdovou cestou,
- náklady na údržbu ciest boli minimálne.

Majme graf, ktorého diagram je modelom tejto situácie. Hranám priradíme hodnoty nákladov na údržbu ciest (napr. v tisíckach korún). Riešením je kosť grafu (silnejšie vyznačená) na obr. 5.3, ktorej súčet ohodnotení hrán je 21.



Obr. 5.3

5.3 Problém okružnej cesty

Predstavme si, že v určitom meste má vyjsť z pošty poštový doručovateľ, obísť všetky ulice svojho obvodu a má sa vrátiť naspäť na poštu. Cestu si má naplánovať tak, aby bola najkratšia.

S touto situáciou úzko súvisí **problém okružnej cesty**, ktorý žiada nájsť v súvislom hranovo ohodnotenom grafe uzavretý sled, ktorý obsahuje každú hranu aspoň raz, a pritom súčet ohodnotení hrán toho sledu je minimálny. Požaduje teda také hranové pokrytie grafu, ktorého súčet ohodnotení hrán je minimálny. Uvažujme nasledujúce prípady.

A. Graf $G = (V, H)$ je hranovo ohodnotený, a pritom eulerovský. V tomto prípade sa graf dá pokryť jedným uzavretým ťahom, v ktorom sa každá hrana grafu vyskytuje práve raz. Súčet ohodnotení hrán toho ťahu je riešením našej úlohy.

B. Graf $G = (V, H)$ je súvislý a má práve dva vrcholy nepárneho stupňa, nech sú to vrcholy u a v . Potom existuje pokrytie grafu jedným otvoreným ťahom

s koncovými vrcholmi u a v , ktorý už obsahuje všetky hrany grafu G . Cesta musí byť okružná, a preto z u do v (alebo naopak) musíme prejsť po niektorých hranách, ktoré sa už vyskytli v otvorenom ťahu. Pre túto cestu vyberieme zo všetkých možností takú, ktorá dáva minimálny súčet ohodnotení hrán. Je zrejmé, že ak k súčtu ohodnotení hrán otvoreného ťahu (všetkých hrán grafu) pridáme súčet ohodnotení hrán minimálnej cesty z u do v , dostaneme okružnú cestu v grafe G s minimálnym súčtom ohodnotení hrán.

C. Prípád B môžeme zovšeobecniť. Nech súvislý graf $G = (V, H)$ obsahuje práve $2m$ ($m > 1$) vrcholov nepárneho stupňa. Potom sa dá pokryť práve m otvorenými ťahmi. Každý z otvorených ťahov v jednom vrchole nepárneho stupňa začína a v inom končí. Preto pri riešení problému vyhľadáme všetky vrcholy s nepárnymi stupňami a snažíme sa ich po dvoch pospájať cestami tak, aby súčet hodnotení hrán týchto m ciest bol minimálny. K tomuto číslu pripočítame súčet ohodnotení všetkých hrán grafu.

Poznámka. Problémom vo väčšom grafe môže byť veľký počet vrcholov nepárnych stupňov. Nájsť minimálne cesty medzi všetkými vrcholmi nepárnych stupňov grafu G môžeme napríklad Dijkstrovým algoritmom, ale výhodnejšia je modifikácia Floydovho algoritmu pre neorientované grafy.

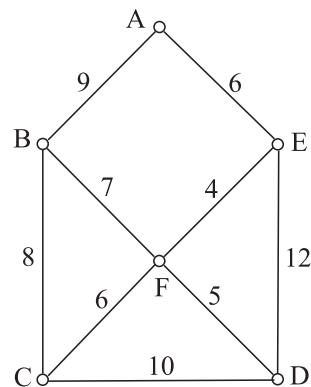
Príklad 5.4 Majme hranovo ohodnotený graf G , ktorého diagram je na obr. 5.4. Vrcholy B, C, D, E majú nepárne stupne. Potrebujeme teda nájsť dve cesty spájajúce do dvojíc tieto štyri vrcholy tak, že súčet ohodnotení ich hrán je minimálny zo všetkých možností. Máme tri možnosti:

$$ED + BC = 9 + 8 = 17,$$

$$EB + DC = 11 + 10 = 21,$$

$$EC + BD = 10 + 12 = 22.$$

Najvýhodnejší je súčet ciest $ED + BC = 17$. Ak k tomu číslu pripočítame súčet ohodnotení všetkých hrán grafu 67, dostaneme hodnotu minimálnej okružnej cesty 84.



Obr. 5.4

5.4 Problém obchodného cestujúceho

Majme hranovo ohodnotený súvislý graf, v ktorom vrcholy predstavujú nejaké mestá a hrany cestné spojenia medzi týmito mestami, pričom ohodnotenie hrany predstavuje dĺžku príslušného cestného spojenia. Obchodný cestujúci má vyjsť z jedného pevne zvoleného mesta, prejsť všetkými mestami práve raz a vrátiť sa do pôvodného mesta, pričom má cestu voliť tak, aby bola najkratšia.

Ak použijeme terminológiu teórie grafov, tak v hranovo ohodnotenom súvislom grafe $G = (V, H)$ máme nájsť *hamiltonovskú kružnicu*, ktorá má minimálny súčet

ohodnotení hrán.

Ak graf nie je hamiltonovský, úloha nemá riešenie. Už vieme, že nepoznáme efektívne algoritmy ani na zistenie existencie hamiltonovskej kružnice v danom grafe, tobôž na nájdenie minimálnej. My si uvedieme metódu, ktorá spoľahlivo rieši problém obchodného cestujúceho, avšak iba v grafoch s malým počtom hrán.

Príklad 5.5 Riešte problém obchodného cestujúceho v grafe, ktorého diagram je na obr. 5.4.

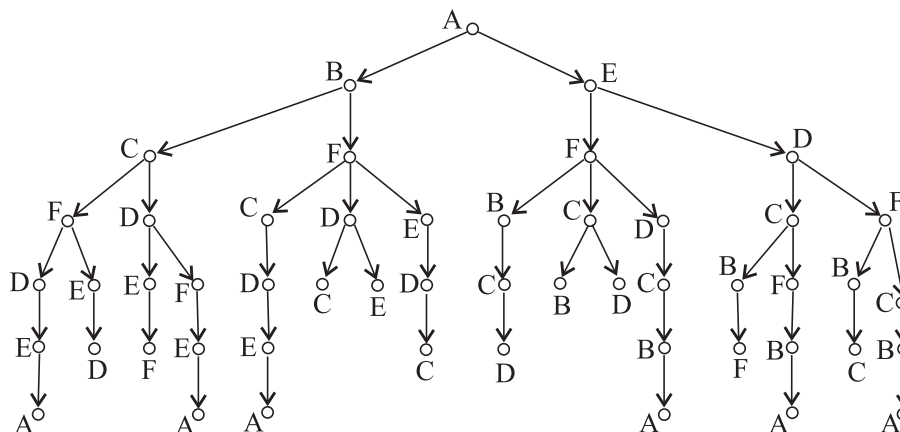
Riešenie. Keďže v hamiltonovskej kružnici nezáleží na počiatočnom vrchole, predpokladajme, že obchodný cestujúci vyjde z mesta A , má prejsť cez všetky mestá B, C, D, E a F práve raz a vrátiť sa do mesta A . Súčet ohodnotení prejdenných hrán má byť minimálny.

Na riešenie problému použijeme tzv. *rozhodovací strom*. Z vrcholu A môžeme ísť do B alebo do E . Tejto situácii budú v strome odpovedať dve orientované hrany, a to hrana (A, B) a hrana (A, E) . Ak si zvolíme cestu do B , máme opäť dve možnosti: buď pôjdeme do C alebo do F . V rozhodovacom strome potom budú hrany (B, C) a (B, F) . Takto pokračujeme ďalej v snahe prejsť všetky vrcholy práve raz a vrátiť sa do vrcholu A . Získame teda rozhodovací strom s koreňom vo vrchole A . Ohodnotenia hrán grafu z obr. 5.4 môžeme preniesť aj do koreňového stromu, my ich však kvôli prehľadnosti na obrázok 5.5 nebudeme zapisovať. Na obr. 5.5 je rozhodovací strom, z ktorého je vidieť, že v grafe existuje práve 6 hamiltonovských kružníc, a to:

$$A\ B\ C\ F\ D\ E\ A\quad (1) \qquad A\ E\ F\ D\ C\ B\ A\quad (4)$$

$$A B C D F E A \quad (2) \qquad A E D C F B A \quad (5)$$

$$A B F C D E A \quad (3) \qquad A E D F C B A \quad (4)$$



Obz. 5.5

Hamiltonovské kružnice (1) a (6), (3) a (5), a tiež (2) a (4) sú rovnaké, líšia sa iba smerom „obehu“. Preto ďalej uvažujeme iba kružnice (1), (2) a (3) a vypočítame súčty ohodnotení ich hrán. Kružnica (2) je minimálna so súčtom 42 ((1) má súčet 46 a (3) má súčet 50). Riešením našej úlohy sú hamiltonovské kružnice (2) a (4).

Poznámka. Táto metóda rozhodovacieho stromu už nie je použiteľná pri hranovo hustých grafoch s viac ako 20 vrcholmi ani ak nasadíme rýchle počítače. Boli vyvinuté niektoré *heuristické* metódy, t.j. metódy ktoré nie vždy sú úspešné, ale dosť často úspešné sú aj na grafoch až do 100 vrcholov. Napríklad metódu penalizácie vrcholov môže čitateľ nájsť vo viacerých knihách zo zoznamu literatúry v závere.

5.5 Metóda kritickej cesty

Uvažujme určitú sieť projektu nejakého výrobného procesu. **Sieťový graf** je grafová reprezentácia nejakého projektu pozostávajúceho z navzájom súvisiacich úloh, ktoré sa musia vykonať v určitom poradí. Je to teda hranovo ohodnotený súvislý acyklický digraf $\vec{G} = (V, H)$ s jediným prameňom a jediným ústím. Orientovaná hrana v digrafe $\vec{G}$ sa používa na znázornenie činnosti, šípka na hrane znázorňuje smer pokračovania v projekte a ohodnotenie každej hrany je plánovaný čas trvania príslušnej činnosti. Vrchol v $\vec{G}$ označuje stav, kedy sú ukončené činnosti, ktoré doňho vstupujú a môžu začať činnosti z neho vychádzajúce. Predpokladajme, že sa nevyskytujú časové straty. Chceme nájsť *optimálne časové trvanie* celého projektu.

Kritickou činnosťou nazývame takú činnosť, predĺženie trvania ktorej (za predpokladu, že v ostatných činnostiach je plánovaná doba trvania dodržaná) spôsobí predĺženie celého procesu. Dráha medzi prameňom a ústím v $\vec{G}$, ktorej každá hrana vyjadruje kritickú činnosť, sa nazýva **kritická cesta**.

Vrcholy sieťového grafu budeme označovať trojicou čísel: i , $T(i)$ a $T'(i)$ (pozri obr. 8.6).

číslo i znamená poradové číslo pri očíslovaní vrcholov číslami od 1 do $|V|$ tak, že každá hrana smeruje z čísla menšieho do väčšieho.

číslo $T(i)$ vyjadruje minimálnu dobu, za ktorú sa dá od začiatku procesu do príslušného stavu dostať – je to **minimálne časové ohodnotenie**.

číslo $T'(i)$ udáva posledný možný čas, v ktorom musia začať všetky činnosti odpovedajúce hranám vychádzajúcim z vrcholu i , aby nedošlo k predĺženiu trvania celého procesu – je to **maximálne časové ohodnotenie**.

Stručne si popíšeme činnosť algoritmu na hľadanie minimálneho časového ohodnotenia vrcholov digrafu. Nech sú už očíslované vrcholy digrafu. Začiatok procesu, t.j. vrchol 1 má minimálne časové ohodnotenie 0 ($T(1) = 0$). Nech i je ľubovoľný vrchol skúmaného digrafu $\vec{G}$. Preberieme všetky vrcholy j , $j < i$, také, že existuje hrana (j, i) . Ak označíme $f(j, i)$ ohodnotenie hrany (j, i) , tak vrchol i ohodnotíme najväčším z čísel $T(j) + f(j, i)$, t.j. označením času, v ktorom budú ukončené

všetky činnosti končiace vo vrchole i . Aby sme mohli vrchol i ohodnotiť, musia byť ohodnotené všetky vrcholy s menšími poradovými číslami.

Algoritmus minimálneho časového ohodnotenia

Vstup: Hranovo ohodnotený, súvislý, acyklický digraf $\vec{G} = (V, H)$ s jediným prameňom, jediným ústím a s očíslovanými vrcholmi od 1 do $n = |V|$ tak, že pre každú hranu (i, j) je $i < j$.

Výstup: Minimálne časové ohodnotenie $T(i)$ pre každý vrchol i .

1. Polož $T(1) := 0$.
2. Polož $i := 2$.
3. Polož $T(i) := \max\{T(j) + f(j, i)\}$ pre všetky vrcholy $j < i$, pre ktoré existuje hrana (j, i) .
4. Ak $i = n$, STOP, inak polož $i := i + 1$.
Skok na krok 3.

Algoritmus maximálneho časového ohodnotenia

Vstup: Hranovo ohodnotený, súvislý, acyklický digraf $\vec{G} = (V, H)$ s jediným prameňom, jediným ústím a s očíslovanými vrcholmi od 1 do $n = |V|$ tak, že pre každú hranu (i, j) je $i < j$. Hodnoty $T(i)$ pre každý vrchol.

Výstup: Maximálne časové ohodnotenie $T'(i)$ pre každý vrchol i .

1. Polož $T'(n) := T(n)$.
2. Polož $i := n - 1$.
3. Polož $T'(i) := \min\{T'(j) - f(i, j)\}$ pre všetky vrcholy $j > i$, pre ktoré existuje hrana (i, j) .
4. Ak $i = 1$, STOP, inak polož $i := i - 1$.
Skok na krok 3.

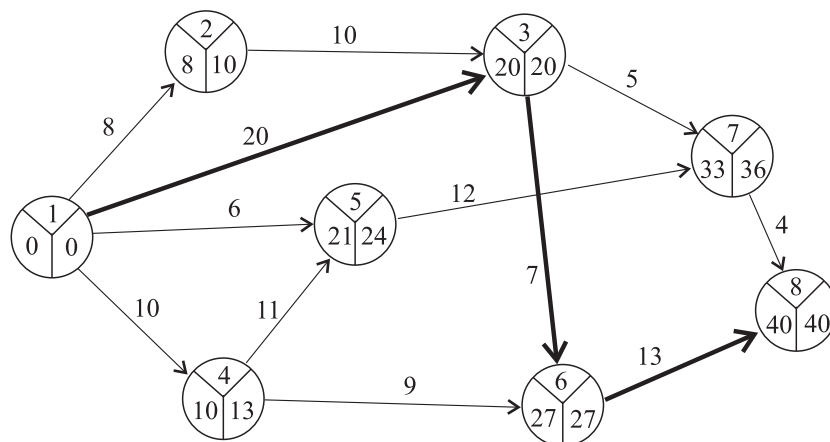
Každý vrchol, ktorého minimálne a maximálne časové ohodnotenia sú rovnaké ($T(i) = T'(i)$), leží na nejakej kritickej ceste, iné vrcholy na kritickej ceste neležia. K tomu, aby hrana (i, j) ležala na kritickej ceste, musí spĺňať podmienky:

1. Vrcholy i, j ležia na kritickej ceste, teda $T(i) = T'(i)$ a $T(j) = T'(j)$.
2. Pre ohodnotenie $f(i, j)$ hrany (i, j) platí $f(i, j) = T(j) - T(i)$ ($f(i, j) = T'(j) - T'(i)$).

Príklad 5.6 Nájdite kritickú cestu výrobného procesu, ktorý je znázornený grafom získaným z grafu na obr. 5.6, ak v ňom vrcholy „stiahneme“ do malých krúžkov a neuvažujeme čísla vo vrcholoch.

Riešenie. Najskôr prekreslíme diagram tak, že väčšie krúžky odpovedajúce vrcholom rozdelíme na tri časti (pozri obr. 5.6). Do horných častí očísľujeme vrcholy tak, aby každá hrana smerovala z vrcholu s menším číslom do vrcholu s väčším. Potom do ľavých častí zapisujeme hodnoty $T(i)$, t.j. minimálne časové ohodnotenia. Vo vrchole 1 je $T(1) = 0$. Vo vrchole 2 je to $T(1) + f(1, 2) = 0 + 8 = 8$, teda $T(2) = 8$. Vo vrchole 3 je: $T(2) + f(2, 3) = 8 + 10 = 18$, $T(1) + f(1, 3) = 0 + 20 = 20$, preto je $T(3) = 20$, atď.

Potom vyplníme hodnoty $T'(i)$, t.j. nájdeme maximálne časové ohodnotenia. Začneme vo vrchole 8, tu je $T'(8) = 40$. Prejdeme k vrcholu 7, kde $T'(8) - f(7, 8) = 40 - 4 = 36$, teda $T'(7) = 36$. Takto pokračujeme vždy k vrcholu s číslom o jednotku menším a napríklad pre vrchol 3 je: $T'(7) - f(3, 7) = 36 - 5 = 31$, $T'(6) - f(3, 6) = 27 - 7 = 20$, teda vo vrchole 3 je $T'(3) = 20$, atď. Hrany kritickej cesty sú na obr. 8.6 vyznačené silnejšie.



Obr. 5.6

5.6 Toky v sieťach

Začneme príkladom. Je daná sieť potrubia, pričom potrubie môže mať rôzne priemery a niektoré jeho časti môžu byť aj jednosmerné. Sieť potrubia je uzavretá okrem dvoch miest, začiatku a a konca z , kde tekutina do potrubia vteká, resp. z neho vyteká. Máme určiť, aké maximálne množstvo tekutiny môže sieťou za určitú dobu pretiecť z a do z . Je logické sa zaujímať o maximálny tok (množstvo kvapaliny za jednotku času). Potrubie a tekutinu sme uviedli iba pre názornosť, ale môže sa jednať o rôzne prenosové siete a prenášané médium môže byť tiež rôzne. Jedným z takých príkladov môžu byť aj siete na prenos informácií medzi jednotlivými počítačmi. Pravidlá, ktoré uvedieme v ďalšej časti, platia pre všetky takéto tzv. *transportné siete*. Teóriu uvedieme iba pre orientované grafy. Ak niektoré potrubia sú obojsmerné, stačí nahradiť neorientované hrany dvojicami opačne orientovaných hrán s rovnakými ohodnoteniami.

Definícia 5.3 **Transportná sieť** (alebo skráteno **sieť**) je súvislý, orientovaný, hranovo ohodnotený graf $\vec{G} = (V, H)$ spĺňajúci nasledujúce podmienky:

1. v $\vec{G}$ existuje jediný prameň a ,
2. v $\vec{G}$ existuje jediné ústie z ,
3. každá hrana (i, j) je ohodnotená nezáporným číslom C_{ij} , ktoré nazývame **kapacita hrany** (i, j) .

Poznámka. V praxi sa iba zriedkavo stáva, že transportná sieť má jediný prameň a jediné ústie. Napríklad vodovodné potrubie rozvádza vodu z viacerých zdrojov a ústia sú v každej domácnosti. Aby sme mohli takúto situáciu matematicky spracovať, pridáme hrany orientované z jedného fiktívneho prameňa do všetkých skutočných, a tiež hrany zo skutočných ústí do fiktívneho ústia. Kapacity nových hrán uvažujeme nekonečne veľké.

Definícia 5.4 Nech $\vec{G}$ je transportná sieť. **Tok** transportnou sieťou je zobrazenie $T : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow H$, ktoré každej hrane (i, j) priradí nezáporné číslo T_{ij} tak, že:

1. pre každú hranu (i, j) je $T_{ij} \leq C_{ij}$,
2. pre každý vrchol j rôzny od prameňa a a ústia platí **zákon zachovania toku** cez tento vrchol, teda

$$\sum_i T_{ij} = \sum_i T_{ji}.$$

Veta 5.1 Nech T je tok v transportnej sieti $\vec{G}$. Potom tok z prameňa je rovný toku do ústia, t.j.

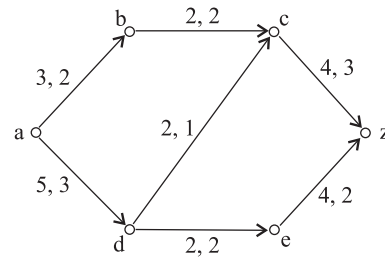
$$\sum_i T_{ai} = \sum_i T_{iz}.$$

Definícia 5.5 Nech T je tok v transportnej sieti $\vec{G}$. číslo

$$\sum_i T_{ai} = \sum_i T_{iz}$$

nazývame **veľkosťou toku** v sieti $\vec{G}$. Tok T je **maximálny**, ak pre každý iný tok T' platí, že jeho veľkosť nie je väčšia ako veľkosť toku T .

Príklad 5.7 Na obr. 5.7 je transportná sieť s vyznačenými kapacitami hrán C_{ij} (prvé číslo na každej hrane) a s tokmi cez hrany T_{ij} (druhé číslo). Veľkosť toku je $T_{ab} + T_{ad} = T_{cz} + T_{ez} = 5$. Je vidieť, že pre každý vrchol okrem a a z platí zákon zachovania toku, teda koľko doňho vtečie, toľko z neho vytečie. Ak by sme ale zmenili tok hranou (d, e) na hodnotu 1, už by neplatil zákon zachovania toku pre vrcholy d a e a ohodnotenia hrán číslami T_{ij} by sa nemohli nazývať tokom.



Obr. 5.7

V tejto jednoduchšej transportnej sieti ľahko zistíme, že ak na hranách (a, d) , (d, c) a (c, z) zvážšime tok o jednotku, zostanú v platnosti podmienky kladené na tok a veľkosť toku bude $T_{ab} + T_{ad} = 6$, teda tiež väčšia o jednotku. Je to spôsobené zvážšením toku pozdĺž cesty $P : adc$. Znamená to, že pôvodný tok v sieti nebol maximálny a bolo možné ho zvážšiť. Nás bude zaujímať práve maximálny tok v sieti, ako získať jeho hodnotu a ako zistiť, že už ho nemožno zvážšiť.

Zistili sme, že ak sa nám podarí nájsť cestu z prameňa do ústia, pozdĺž ktorej je možné zvážšiť tok, tak sa zvážši tok celou sieťou. V našom prípade však všetky hrany cesty $P : adc$ boli orientované od prameňa k ústiu, teda **zhodne s cestou** P . V niektorých sieťach je možné zvážšovať tok aj pozdĺž ciest, ktoré obsahujú aj hrany **opačne orientované vzhľadom na cestu**. O možnosti zvážšenia toku celou sieťou nás informuje nasledujúca veta.

Veta 5.2 *Nech P je cesta v transportnej sieti $\vec{G}$ spĺňajúca podmienky:*

1. *pre každú zhodne orientovanú hranu (i, j) cesty P je $T_{ij} < C_{ij}$,*
2. *pre každú opačne orientovanú hranu (i, j) cesty P je $0 < T_{ij}$.*

Nech X je množina obsahujúca čísla $C_{ij} - T_{ij}$ pre zhodne orientované hrany cesty P a čísla T_{ij} pre opačne orientované hrany cesty P .

Ak $\Delta = \min X$ a T^ je tok transportnou sieťou definovaný*

$$T_{ij}^* = \begin{cases} T_{ij}, & \text{ak } (i, j) \notin P, \\ T_{ij} + \Delta, & \text{ak } (i, j) \text{ je zhodne orientovaná s } P, \\ T_{ij} - \Delta, & \text{ak } (i, j) \text{ je opačne orientovaná vzhľadom na } P, \end{cases}$$

tak veľkosť toku T^ je o Δ väčšia ako veľkosť pôvodného toku T .*

Na základe tejto vety môžeme zostrojiť algoritmus na hľadanie maximálneho toku v transportnej sieti. Princíp jeho činnosti spočíva v tom, že v transportnej sieti so zadanými kapacitami hrán začneme nejakým tokom (môže to byť nulový tok každou hranou) a hľadáme cestu z prameňa do ústia, pozdĺž ktorej je možné tok zvážšiť. Ak ju nájdeme, tok zvážšime, a opakujeme tento proces znovu. Ako pomôcku pri hľadaní cesty z a do z použijeme označovanie vrcholov usporiadanou dvojicou znakov, kde prvý znak znamená predchádzajúci vrchol práve označovaného vrcholu na hľadanej ceste P a druhý znak je rovný hodnote, o ktorú je možné zvážšiť tok na ceste P od prameňa po práve označovaný vrchol. Za preverený vrchol považujeme taký, z ktorého sme už označovali jeho neoznačených susedov. Algoritmus ukončí svoju činnosť až keď tok sieťou je maximálny. Prečo je to tak, si uvedieme neskôr.

Algoritmus maximálneho toku (Ford – Fulkerson)

Vstup: Transportná sieť $\vec{G} = (V, H)$, prameň a , ústie z , kapacity hrán $C_{i,j}$ pre každú hranu (i, j) a vrcholy očíslované $a = v_0, v_1, \dots, v_n = z$.

Výstup: Maximálny tok T .

1. Polož $T_{ij} := 0$ pre každú hranu (i, j) .
2. Označ vrchol a usporiadanou dvojicou $(, \infty)$.
3. Ak je vrchol z označený, skok na krok 6.
4. Zvoľ označený, ale nepreverený vrchol v_i s najmenším indexom i . Ak taký neexistuje, STOP (tok je maximálny), inak polož $v := v_i$.
5. Nech (α, Δ) je označenie vrcholu v . Prever každú hranu (v, w) a (w, v) (v poradí $(v, v_0), (v_0, v), (v, v_1), (v_1, v), \dots$), kde w je neoznačený vrchol. Ak pre hranu (v, w) je $T_{vw} < C_{vw}$, označ vrchol w usporiadanou dvojicou

$$(v; \min\{\Delta, C_{vw} - T_{vw}\}),$$

inak hranu (v, w) neoznačuj. Ak pre hranu (w, v) je $T_{wv} > 0$, označ vrchol w usporiadanou dvojicou

$$(v; \min\{\Delta, T_{wv}\}),$$

inak hranu (w, v) neoznačuj.

Skok na krok 3.

6. Nech (γ, Δ) je označenie vrcholu z . Nech $w_0 = z$, $w_1 = \gamma$. Ak označenie vrcholu w_i je (γ', Δ') , polož $w_{i+1} := \gamma'$. Pokračuj až do $w_k = a$. Teraz

$$P : a = w_k w_{k-1} \dots w_1 w_0 = z$$

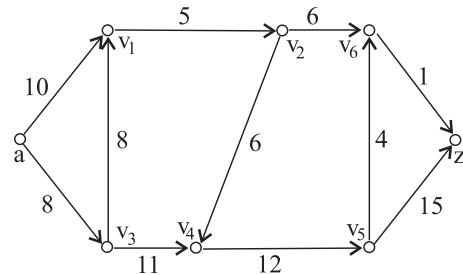
je hľadaná cesta z a do z .

Zmeň tok pozdĺž cesty P takto: Ak hrana h je zhodne orientovaná s P , zvýš jej tok o Δ , ak je opačne orientovaná, zníž jej tok o Δ . Zruš označenia všetkých vrcholov.

Skok na krok 2.

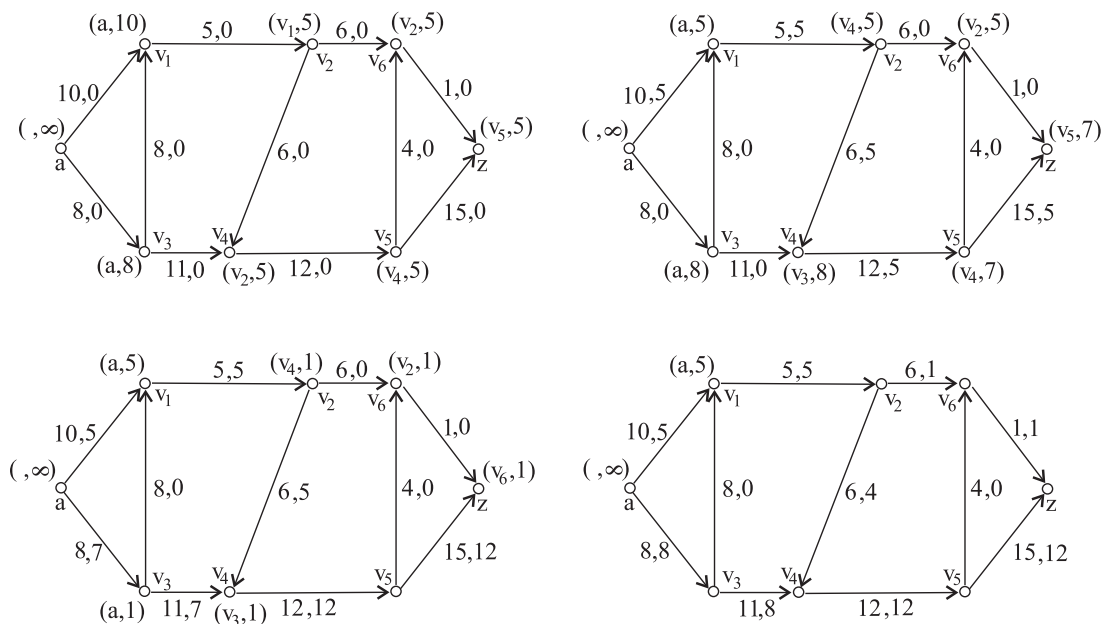
Príklad 5.8 Nájdite maximálny tok v transportnej sieti z obr. 5.8.

Riešenie. Každéj hrane priradíme tok $T_{ij} = 0$. Označíme vrchol a znakom $(, \infty)$. Teraz označujeme jeho susedov, pričom zachováme ich poradie. Vrchol v_1 označíme znakom $(a, 10)$ a vrchol v_3 znakom $(a, 8)$. Tým sa vrchol a stáva prevereným. Z označených a nepreverených vrcholov má minimálny index vrchol v_1 , takže teraz sa zaujímate o jeho neoznačených susedov. Je to jediný vrchol v_2 a dostane označenie $(v_2, 5)$. ďalší preverovaný vrchol je v_2 .



Obr. 5.8

Jeho neoznačené susedné vrcholy v_4 a v_6 označíme rovnako $(v_2, 5)$. Teraz z označených a nepreverených vrcholov má najmenší index vrchol v_3 . Nemá neoznačených susedov a tým sa stáva prevereným. Nasleduje vrchol v_4 . Jeho jediný neoznačený sused v_5 dostane označenie $(v_4, 5)$. Teraz preverujeme v_5 a z neho označíme iba vrchol z znakom $(v_5, 5)$. Keďže vrchol z je už označený, pokračujeme krokom 6, kde získame cestu $P : av_1v_2v_4v_5z$, pozdĺž ktorej môžeme zväčšiť tok o hodnotu 5. Urobíme to a začneme celý proces hľadania novej cesty z prameňa do ústia odznova. ďalšie pokračovania sa dajú sledovať na postupnosti diagramov na obr. 5.9.



Obr. 5.9

Na vysvetlenie, že v momente ukončenia práce algoritmu je už dosiahnutý tok maximálny, potrebujeme nasledujúce pojmy.

Definícia 5.6 *Rez $(P, \bar{P})$ v transportnej sieti $\vec{G} = (V, H)$ je rozklad jej vrcholovej množiny na množinu P obsahujúcu prameň a jej komplement $\bar{P}$, ktorý obsahuje ústie.*

Kapacita rezu $(P, \bar{P})$ je číslo

$$C(P, \bar{P}) = \sum_{i \in P} \sum_{j \in \bar{P}} C_{ij}.$$

Rez v sieti je teda ľubovoľné rozdelenie vrcholovej množiny V na množiny P a $\bar{P}$, pričom $a \in P$, $z \in \bar{P}$, $P \cup \bar{P} = V$ a $P \cap \bar{P} = \emptyset$. Kapacita rezu je súčet kapacít všetkých hrán, ktoré začínajú v P a končia v $\bar{P}$. Hrany z $\bar{P}$ do P nás pri kapacite rezu nezaujímajú.

Veta 5.3 *Nech T je tok v transportnej sieti $\vec{G} = (V, H)$ a nech $(P, \bar{P})$ je rez v $\vec{G}$. Potom kapacita rezu $(P, \bar{P})$ je väčšia alebo rovná ako veľkosť toku T , t.j.*

$$C(P, \bar{P}) = \sum_{i \in P} \sum_{j \in \bar{P}} C_{ij} \geq \sum_i T_{ai}.$$

Veta 5.4 *Nech T je tok v transportnej sieti $\vec{G} = (V, H)$ a nech $(P, \bar{P})$ je rez v $\vec{G}$. Ak veľkosť toku T je rovná kapacite rezu $(P, \bar{P})$, tak tok T je maximálny a rez $(P, \bar{P})$ je minimálny. Navyše*

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in \bar{P}} C_{ij} = \sum_i T_{ai}$$

práve vtedy, ak

a) $T_{ij} = C_{ij}$ pre všetky $i \in P$ a $j \in \bar{P}$

a zároveň

b) $T_{ij} = 0$ pre všetky $i \in \bar{P}$ a $j \in P$.

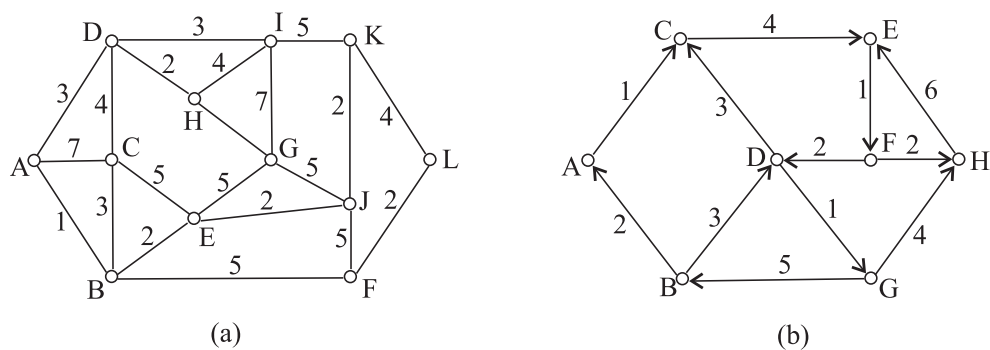
To znamená, že ak sa nám v transportnej sieti podarí nájsť taký rez $(P, \bar{P})$, že pre každú hranu smerujúcu z P do $\bar{P}$ je tok cez ňu rovný jej kapacite a tok každou hranou z $\bar{P}$ do P je nulový, tak máme minimálny rez a jeho kapacita je zároveň rovná maximálnemu toku sieťou. Ak si všimneme, že algoritmus na hľadanie maximálneho toku končí práve vtedy, keď už nemôžeme označovať ďalšie vrcholy, t.j. keď hrany smerujúce z označených vrcholov do neoznačených sú už nasýtené a zároveň hrany z neoznačených vrcholov do označených majú nulové hodnoty toku, tak môžeme vysloviť nasledujúcu vetu.

Veta 5.5 *V momente skončenia činnosti algoritmus (Ford – Fulkerson) dáva na výstupe maximálny tok. Navyše, ak P ($\bar{P}$) je množina označených (neoznačených) vrcholov v okamihu ukončenia činnosti algoritmu, tak rez $(P, \bar{P})$ je minimálny.*

5.7 úlohy

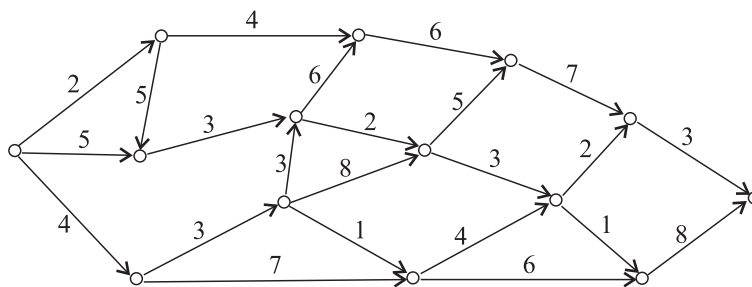
8.1. V grafe, ktorého diagram je na obr. 5.10(a):

- Nájdite minimálnu kostru.
- Nájdite maximálnu kostru.
- Vypočítajte dĺžky minimálnych ciest z vrcholu a do ostatných vrcholov.
- Riešte problém okružnej cesty.



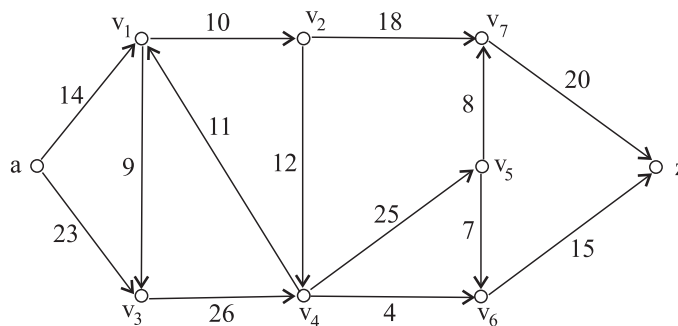
Obr. 5.10

- 8.2. Vypočítajte dĺžky minimálnych spojení medzi všetkými dvojicami vrcholov v digrafe na obr. 5.10(b).
- 8.3. V grafe získanom zrušením orientácií hrán digrafu na obr. 5.10(b) riešte problém obchodného cestujúceho.
- 8.4. Nájdite kritickú cestu v sieťovom grafe, ktorého diagram je na obr. 5.11.



Obr. 5.11

- 8.5. Vypočítajte maximálny tok transportnou sieťou, ktorá je na obr. 5.12.



Obr. 5.12

Literatúra

- [1] J. Bosák: *Grafy a ich aplikácie*, ALFA, Bratislava 1980.
- [2] M. Bučko: *Grafy*, ALFA, Bratislava 1985.
- [3] M. Bučko, M. Klešč: *Diskrétna matematika*, Academic Press *elfa*, s.r.o., Košice 1999.
- [4] J. Galanová, J. Bosák, J. Gatiaľ: *Algebry a grafy*, ES SVŠT, Bratislava 1987.
- [5] F. Harary: *Graph Theory*, Addison–Wesley, Reading, MA, 1969.
- [6] J. Johnsonbaugh: *Discrete Mathematics*, Macmillan Publishing Company, New York 1990.
- [7] O. Kolář, O. štepánková, M. Chytil: *Logika, algebry a grafy*, SNTL, Praha 1989.
- [8] L. Kučera: *Kombinatorické algoritmy*, SNTL, Praha 1983.
- [9] J. Matoušek, J. Nešetřil: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Nakladatelství Karolinum, Praha 2000.
- [10] J. Nečas: *Grafy a ich použití*, SNTL, Praha 1978.
- [11] J. Nešetřil: *Teorie grafů*, SNTL, Praha 1979.
- [12] J. Plesník: *Grafové algoritmy*, VEDA, Bratislava 1983.
- [13] F. P. Preparata, R. T. Yeh: *úvod do diskrétnych matematických štruktúr*, ALFA, Bratislava 1982.
- [14] K. H. Rosen: *Discrete Mathematics and Its Applications*, AT&T Information Systems, New York 1988.
- [15] J. Sedláček: *úvod do teorie grafů*, Akademie, Praha 1981.