Max-plus algebra

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

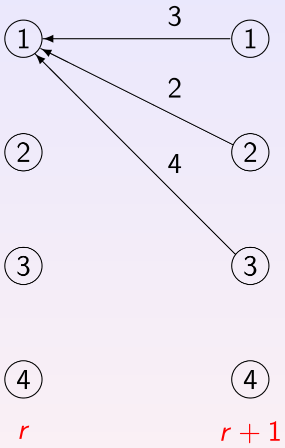
Obsah

Modelový systém - výrobná linka - motivácia

Formulácia

Predpokladajme, že časy $x(5)$, ktoré sme pre ukončenie projektu na výrobnej linke so štyrmi strojmi vypočítali v predchádzajúcich príkladoch, sú záväzné pri plánovaní ukončenia zákazky. Vzhľadom na možné sklzy v priebehu výroby (výpadok prúdu, pokazený stroj) vyvstáva problém: Aký veľký výpadok, na ktorom stroji a pri ktorom pracovnom úkone si môžeme dovoliť, aby sme napriek tomu dodržali sľúbené časy $x(5)$ ukončenia zákazky?

Modelový systém - výrobná linka - ilustrácia



práca 1. stroja **pre linku**, t.j. 1. stroj musí ukončiť r-tý úkon nie neskôr ako

- 3 j. č. pred svojim $(r+1)$-vým úkonom
- 2 j. č. pred $(r+1)$-vým úkonom 2. stroja
- 4 j. č. pred $(r+1)$-vým úkonom 3. stroja

$y_i(r)$ čas, kedy sa **najneskôr** môže ukončiť r-tý pracovný úkon na i-tom stroji

$$y_1(r) = \min\{y_1(r+1) - 3,\ y_2(r+1) - 2,\ y_3(r+1) - 4\}$$

Formalizácia zápisu - použitím prvku $\varepsilon' = \infty$

$$y_1(r) = \min\{y_1(r+1) - 3,\ y_2(r+1) - 2,\ y_3(r+1) - 4\}$$

ak položíme $\bar{a}_{14} = \varepsilon' = \infty$, formálny zápis

$$y_1(r) = \min\{y_1(r+1) + \bar{a}_{11}, y_2(r+1) + \bar{a}_{12}, y_3(r+1) + \bar{a}_{13}, y_4(r+1) + \bar{a}_{14}\}$$

kde

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= -a_{11} \\ \bar{a}_{12} &= -a_{21} \\ \bar{a}_{13} &= -a_{31} \\ \bar{a}_{14} &= -a_{41} \end{aligned} \qquad (1)$$

Formalizácia zápisu - rekurzívny zostupný popis DDS

Rekurzívny zostupný popis systému pozostávajúci z n strojov v klasickej algebre:

$$y_i(r) = \min\{y_1(r+1)+\bar{a}_{i1}, y_2(r+1)+\bar{a}_{i2}, \ldots, y_n(r+1)+\bar{a}_{in}\}$$

- i-tý stroj $\quad i = 1, 2, \ldots, n$
- $(r+1)$-vá udalosť (pracovný úkon) $\quad r = 1, 2, \ldots$

Definícia

Definícia

Nech $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel. Nech $\mathbb{R}^{\star'} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Nech $a \oplus' b = \min\{a, b\}$ a $a \otimes' b = a + b$, pre ľubovoľné $a, b \in \mathbb{R}^{\star'}$. Usporiadanú trojicu $(\mathbb{R}^{\star'}, \oplus', \otimes')$ budeme nazývať min-plus algebra.

Príklad:

1. $3 \otimes' 4 = 3 + 4 = 7$
2. $4 \otimes' 3 = 4 + 3 = 7$
3. $5 \oplus' 8 = \min\{5, 8\} = 5$
4. $8 \oplus' 5 = \min\{8, 5\} = 5$
5. $2 \otimes' (4 \oplus' 6) = 2 + \min\{4, 6\} = 2 + 4 = 6$
6. $2 \otimes' 4 \oplus' 2 \otimes' 6 = \min\{2 + 4, 2 + 6\} = \min\{6, 8\} = 6$

Výsledky v duálnych algebrách

Min-plus algebra je tzv. duálna algebra k max-plus algebre. Každému výsledku v max-plus algebre zodpovedá analogický (vzhľadom na nové operácie) tzv. duálny výsledok, ktorý platí v min-plus algebre.

Súčin matíc v min-plus algebre

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star'}(m,r)$ a $B \in \mathbb{R}^{\star'}(r,n)$. Súčinom matíc A a B nazývame maticu $C \in \mathbb{R}^{\star'}(m,n)$, $C = (c_{ij})$, pre ktorú

$$c_{ij} = a_{i1} \otimes' b_{1j} \oplus' a_{i2} \otimes' b_{2j} \oplus' \cdots \oplus' a_{ir} \otimes' b_{rj} = \sum_k^{\oplus'} a_{ik} \otimes' b_{kj},$$

pre $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Zápis: $C = A \otimes' B$

Príklad:

$$A \otimes' B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

$$c_{12} = 2 \otimes' 4 \oplus' 0 \otimes' 3 \oplus' (-1) \otimes' 2 = \min\{2+4,\ 0+3,\ -1+2\} = 1$$

Jednotková matica v min-plus algebre

Definícia

Štvorcovú maticu $E' \in \mathbb{R}^{\star'}(n,n)$, $E' = (\bar{e}_{ij})$ nazývame jednotkovou maticou, ak pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$

$$\bar{e}_{ij} = \begin{cases} \varepsilon' & \text{pre} \quad i \neq j \\ 0 & \text{pre} \quad i = j \end{cases}$$

Príklad:

$$E' = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon' & 0 & \varepsilon' \\ \varepsilon' & \varepsilon' & 0 \end{pmatrix}$$

Mocnina matice v min-plus algebre

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star\prime}(n,n)$. Nech $p \in \mathbb{N}$. p-tou mocninou matice A nazývame maticu $A^{[p]}$

$$A^{[p]} = \begin{cases} E' & p = 0 \\ A \otimes' A^{[p-1]} & p = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Zápis: $A^{[p]} = (a_{ij}^{[p]})$

Príklad:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon' & 4 \end{pmatrix}^{[3]} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon' & 4 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon' & 4 \end{pmatrix}^{[2]} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \varepsilon' & 4 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ \varepsilon' & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ \varepsilon' & 12 \end{pmatrix}$$

Formalizácia zápisu - rekurzívny zostupný popis DDS

Rekurzívny zostupný popis systému pozostávajúci z n strojov v min-plus algebre:

$$y_i(r) = y_1(r+1) \otimes' \bar{a}_{i1} \oplus' y_2(r+1) \otimes' \bar{a}_{i2} \oplus' \ldots \oplus' y_n(r+1) \otimes' \bar{a}_{in}$$

Maticový zápis:

$$y(r) = A' \otimes' y(r+1) = (-A)^\top \otimes' y(r+1)$$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Príklad:

Majme výrobnú linku pozostávajúcu zo 4 strojov, ktorú sme predstavili v predošlých príkladoch. Nech A je matica prechodu daného DDS, resp. $x(5)$ časy ukončenia projektu, ak výrobný proces začne na všetkých strojoch v čase nula

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad x(5) = \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Aký výpadok pri jednotlivých strojoch môžme tolerovať pri 4-tom pracovnom úkone, aby sme dodržali časy $x(5)$ ukončenia projektu?

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Riešenie:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad A' = (-A)^\top = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 & \varepsilon' \\ -4 & -5 & -6 & -3 \\ \varepsilon' & -2 & -3 & 0 \\ -8 & \varepsilon' & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$y(r) = A' \otimes' y(r+1)$$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Riešenie:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad A' = (-A)^\top = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 & \varepsilon' \\ -4 & -5 & -6 & -3 \\ \varepsilon' & -2 & -3 & 0 \\ -8 & \varepsilon' & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$y(r) = A' \otimes' y(r+1)$$

Ak $y(5) = x(5)$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Riešenie:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad A' = (-A)^\top = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 & \varepsilon' \\ -4 & -5 & -6 & -3 \\ \varepsilon' & -2 & -3 & 0 \\ -8 & \varepsilon' & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$y(r) = A' \otimes' y(r+1)$$

Ak $y(5) = x(5)$

$$y(4) = A' \otimes' y(5) = A' \otimes' \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 23 \\ 26 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Porovnaním najneskorších časov ukončenia 4-tej etapy $y(4)$ a najskorších časov ukončenia 4-tej etapy $x(4)$ zistíme

$$y(4) = \begin{pmatrix} 26 \\ 23 \\ 26 \\ 24 \end{pmatrix} \qquad x(4) = \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}$$

- na 1. stroji je najskorší a najneskorší čas ukončenia 4-ej etapy totožný, t.j. žiaden sklz si nemôžeme dovoliť
- na 2. stroji je najskorší čas o 1 č.j. menší ako najneskorší čas ukončenia 4-ej etapy , t.j. môžeme si dovoliť sklz si 1 č.j.
- na 3. stroji si môžeme dovoliť sklz 2 č.j.
- na 4. stroji si žiaden sklz nemôžeme dovoliť

Zostupný stavový orbit

Definícia

Majme DDS s maticou prechodu $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$ a vektor $y \in F(n, 1)$. Postupnosť stavov $y(p+1) = y$, $y(p) = A' \otimes' y$, $y(p-1) = (A')^{[2]} \otimes' y$, ..., $y(1) = (A')^{[p]} \otimes' y$ nazývame $(p+1)$-stavový zostupný orbit založený na vektore y.

Pre modelový systém z predchádzajúceho príkladu 5-stavový zostupný orbit má tvar:

$$
\begin{array}{ccccc}
y(5), & y(4), & y(3), & y(2), & y(1) \\
\begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 26 \\ 23 \\ 26 \\ 24 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 21 \\ 18 \\ 21 \\ 18 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Kritické stavy

Definícia

Nech DDS je daný maticou prechodu $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Ak existuje $r \in \{1,2,\ldots\}$ pre ľubovoľné $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ také, že sa najskorší čas ukončenia cyklu $x_i(r)$ a najneskorší čas ukončenia cyklu $y_i(r)$ rovnajú

$$x_i(r) = y_i(r), \tag{2}$$

tak $x_i(r)$ nazývame kritickým stavom.

Kritické stavy - Príklad

Kritické stavy modelového systému:

$$x(r):\begin{pmatrix}3\\5\\3\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}14\\10\\11\\12\end{pmatrix},\begin{pmatrix}20\\16\\18\\18\end{pmatrix},\begin{pmatrix}26\\22\\24\\24\end{pmatrix},\begin{pmatrix}32\\28\\30\\30\end{pmatrix}$$

$$y(r):\begin{pmatrix}11\\8\\11\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}16\\13\\16\\12\end{pmatrix},\begin{pmatrix}21\\18\\21\\18\end{pmatrix},\begin{pmatrix}26\\23\\26\\24\end{pmatrix},\begin{pmatrix}32\\28\\30\\30\end{pmatrix}$$

Kriticky spojené stavy

$\forall i, j, r$ musí nastať jeden z prípadov:

$$\begin{aligned} x_i(r+1) &> a_{ij} + x_j(r) \\ &= a_{ij} + x_j(r) \end{aligned}$$

Definícia

Kritické stavy $x_i(r+1)$ a $x_j(r)$, pre ktoré

$$x_i(r+1) = a_{ij} + x_j(r), \tag{3}$$

nazývame kriticky spojené.

$$x(r): \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Kritický diagram

Definícia

Ak spojíme vo vzostupnom orbite každé dva kriticky spojené kritické stavy, dostaneme kritický diagram.

Poznámka: Kritický diagram ukazuje, ako malý sklz kritického stavu vyvolá sklz nasledujúcich kritických stavov.

Algoritmus vytvorenia kritického diagramu

1. zostrojíme n-rozmerný vektor $x(1)$ na základe vstupnej matice prechodu A rádu n a vstupného n-rozmerného vektora t časov spustenia výroby na jednotlivých strojoch: $x(1) = \mathrm{diag}(A) + t$,
2. zostrojíme vzostupný orbit $x(1), x(2), \ldots, x(p)$ dĺžky p rovnej zadanému počtu etáp, podľa vzťahu $x(r+1) = A \otimes x(r)$, pre $r = 1, 2, \ldots, p - 1$, pričom uchováme informáciu, pre aké j vznikla hodnota $x_i(r+1)$ z hodnoty $x_j(r)$, pre $i = 1, 2, \ldots, n$ (ak $x_i(r+1)$ a $x_j(r)$ sú kritické stavy, tak sú kriticky spojené),
3. položíme $y(p) = x(p)$ a zostrojíme zostupný orbit $y(p), \ldots, y(2), y(1)$ dĺžky p podľa vzťahu $y(r) = A' \otimes' y(r+1)$, pre $r = p-1, \ldots, 2, 1$,
4. porovnáme časy $x_i(r)$ a $y_i(r)$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$ v danej etape, a ak sa rovnajú, vyznačíme vo vzostupnom orbite tento kritický stav, postup opakujeme pre etapy $r = 1, 2, \ldots, p$,
5. vo vzostupnom orbite spojíme úsečkou tie dva kritické stavy v dvoch po sebe nasledujúcich etapách, ktoré sú kriticky spojené.

Kritický diagram

$$x(r): \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Kritický diagram

$$x(r): \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Kritický diagram

$$x(r): \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Kritický diagram

$$x(r): \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Kritický diagram

$$x(r):\begin{pmatrix}3\\5\\3\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14\\10\\11\\12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20\\16\\18\\18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}26\\22\\24\\24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}32\\28\\30\\30\end{pmatrix}$$

Kritický diagram

$$x(r): \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Kritický diagram

$$x(r):\begin{pmatrix}3\\5\\3\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14\\10\\11\\12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20\\16\\18\\18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}26\\22\\24\\24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}32\\28\\30\\30\end{pmatrix}$$

Kritický diagram

$$x(r):\ \begin{pmatrix}3\\5\\3\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14\\10\\11\\12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20\\16\\18\\18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}26\\22\\24\\24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}32\\28\\30\\30\end{pmatrix}$$

Kritický diagram

$$x(r): \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Kritický diagram

$$x(r): \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Konjugácia skalárov a matíc

Definícia

Nech $A = (a_{ij})$ je matica, kde $a_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Maticu $A' = (\bar{a}_{ij})$ nazývame konjugovanou maticou k matici A, ak pre $i, j = 1, 2, \dots, n$

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} & \text{pre} \quad a_{ji} \in \mathbb{R} \\ \varepsilon & \text{pre} \quad a_{ji} = \varepsilon' \\ \varepsilon' & \text{pre} \quad a_{ji} = \varepsilon \end{cases}$$

Operáciu $'$ nazývame konjugáciou.

Poznámka: Skalár možno považovať za maticu typu 1×1.

Príklad: $3' = -3$

Konjugácia matíc - Príklad

Príklad:

1. $(2, -3, 1)' = (-2, 3, -1)^{\top}$

2. $$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \varepsilon & 0 \\ 1 & \varepsilon' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -3 & \varepsilon' & -1 \\ 2 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Vlastnosti konjugácie - súčet skalárov

Veta (Konjugácia súčtu skalárov)

Nech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Potom platí

1. $$\left[\sum_j^{\oplus} \lambda_j\right]' = \sum_j^{\oplus'} \lambda_j',$$
2. $$\left[\sum_j^{\oplus'} \lambda_j\right]' = \sum_j^{\oplus} \lambda_j'.$$

Príklad:

- $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = 4$
   1. $$\left[\sum_j^{\oplus} \lambda_j\right]' = -4 = \sum_j^{\oplus'} \lambda_j'$$
   2. $$\left[\sum_j^{\oplus'} \lambda_j\right]' = 3 = \sum_j^{\oplus} \lambda_j'$$

Vlastnosti konjugácie - súčet matíc

Veta

Nech $\lambda \in \mathbb{R}$. Nech $x \in F(m, 1)$. Potom platí

1. $\lambda' \otimes \lambda = 0$,
2. $|\lambda| = \lambda \oplus \lambda'$,
3. $x' \otimes x = 0$.

Veta (Konjugácia súčtu matíc)

Nech $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ sú matice, kde a_{ij}, $b_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Potom platí

1. $(A \oplus B)' = A' \oplus' B'$,
2. $(A \oplus' B)' = A' \oplus B'$.

Vlastnosti konjugácie - súčin

Veta (Konjugácia súčinu skalárov)

Nech λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$(\lambda \otimes \mu)' = \mu' \otimes' \lambda'$$

Veta (Konjugácia súčinu matíc)

Nech $A \in F(m, r)$, $B \in F(r, n)$. Potom platí

$$(A \otimes B)' = B' \otimes' A'$$

D: Nech $C = (c_{ij}) = A \otimes B$ a $C' = (c'_{ji})$

$$\left[\sum_k^{\oplus} a_{jk} \otimes b_{ki}\right]' = \sum_k^{\oplus'} (a_{jk} \otimes b_{ki})' = \sum_k^{\oplus'} b'_{ik} \otimes' a'_{kj}$$

Vlastnosti konjugácie - mocnina matice

Veta

Nech $A \in F(m, r)$, $B \in F(r, n)$, tak $A \otimes' B \in F(m, n)$.

Veta (Konjugácia mocniny matice)

Nech $A \in F(n, n)$. Potom platí

$$(A^k)' = (A')^{[k]}$$

D: veta o konjugácii súčinu matíc

$$(A \otimes B)' = B' \otimes' A'$$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Príklad:

Majme výrobnú linku pozostávajúcu zo 4 strojov, ktorú sme predstavili v predošlých príkladoch. Nech A je matica prechodu daného DDS, resp. $y(5)$ časy ukončenia projektu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad y(5) = \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Kedy najneskôr musíme spustiť výrobu na jednotlivých strojoch, aby sme dodržali časy $y(5)$ ukončenia projektu?

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

$$y(1) = A' \otimes' (A' \otimes' (A' \otimes' (A' \otimes' y(5)))) =$$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

$$
\begin{aligned}
y(1) &= A' \otimes' (A' \otimes' (A' \otimes' (A' \otimes' y(5)))) = \\
&= (A')^{[4]} \otimes' y(5) = (A^4)' \otimes' y(5) =
\end{aligned}
$$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

$$
\begin{aligned}
y(1) &= A' \otimes' (A' \otimes' (A' \otimes' (A' \otimes' y(5)))) = \\
&= (A')^{[4]} \otimes' y(5) = (A^4)' \otimes' y(5) = \\
&= \begin{pmatrix} 19 & 23 & 20 & 26 \\ 17 & 20 & 17 & 22 \\ 18 & 21 & 18 & 24 \\ 17 & 21 & 18 & 24 \end{pmatrix}' \otimes' \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} =
\end{aligned}
$$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

$$
\begin{aligned}
y(1) &= A' \otimes' (A' \otimes' (A' \otimes' (A' \otimes' y(5)))) = \\
&= (A')^{[4]} \otimes' y(5) = (A^4)' \otimes' y(5) = \\
&= \begin{pmatrix} 19 & 23 & 20 & 26 \\ 17 & 20 & 17 & 22 \\ 18 & 21 & 18 & 24 \\ 17 & 21 & 18 & 24 \end{pmatrix}' \otimes' \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -19 & -17 & -18 & -17 \\ -23 & -20 & -21 & -21 \\ -20 & -17 & -18 & -18 \\ -26 & -22 & -24 & -24 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

$$
\begin{aligned}
y(1) &= A' \otimes' (A' \otimes' (A' \otimes' (A' \otimes' y(5)))) = \\
&= (A')^{[4]} \otimes' y(5) = (A^4)' \otimes' y(5) = \\
&= \begin{pmatrix} 19 & 23 & 20 & 26 \\ 17 & 20 & 17 & 22 \\ 18 & 21 & 18 & 24 \\ 17 & 21 & 18 & 24 \end{pmatrix}' \otimes' \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -19 & -17 & -18 & -17 \\ -23 & -20 & -21 & -21 \\ -20 & -17 & -18 & -18 \\ -26 & -22 & -24 & -24 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
t = y(1) - \mathrm{diag}(A) = (8, 3, 8, 0)^\top
$$

Minimax algebra

Definícia

Pojmom minimax algebra budeme označovať výpočty na množine $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ s požitím operácií z max-plus aj min-plus algebry, pričom definujeme

$$\begin{aligned} \varepsilon \otimes \varepsilon' &= \varepsilon' \otimes \varepsilon = \varepsilon \\ \varepsilon \otimes' \varepsilon' &= \varepsilon' \otimes' \varepsilon = \varepsilon' \end{aligned}$$

Poznámka:
Ak $x(1)$ je konečný a $A \in F(n, n)$, tak je celý $(p+1)$- stavový vzostupný orbit konečný. Keďže platí aj duálne tvrdenie je aj celý zostupný orbit konečný. Teda s problémom $\varepsilon \otimes \varepsilon'$, resp. ostatnými dodatočne definovanými operáciami sa nebudeme stretávať.

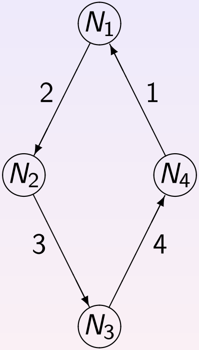
Model dopravného systému - popis

Popis systému:

Majme kruhový dopravný systém v meste, ktorý spája štyri mestské časti N_1, N_2, N_3 a N_4 s nasledujúcimi spojmi:

- z mestskej časti N_1 ide spoj do N_2 a presun trvá 2 č.j.
- z mestskej časti N_2 ide spoj do N_3 a presun trvá 3 č.j.
- z mestskej časti N_3 ide spoj do N_4 a presun trvá 4 č.j.
- z mestskej časti N_4 ide spoj do N_1 a presun trvá 1 č.j.

Model dopravného systému - ilustrácia



Matica dopravného systému

Definícia

Maticou dopravného systému s n spojmi nazývame štvorcovú maticu $D = (d_{ij})$ rádu n, v ktorej každý prvok d_{ij} je buď konečné reálne číslo, ktoré reprezentuje čas prepravy z dopravného uzla j do dopravného uzla i alebo číslo rovné $\varepsilon' = \infty$, ak z dopravného uzla j do dopravného uzla i priamy spoj nepremáva.

Dopravný systém predstavený v príklade má maticu

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon' & 1 \\ 2 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon' & 3 & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon' & \varepsilon' & 4 & \varepsilon' \end{pmatrix}$$

Formulácia problému

Formulácia

Predpokladajme, že autobusy sa vydajú na cestu v časoch u_1, u_2, u_3 a u_4. Aké najskoršie môžu byť časy v_1, v_2, v_3 a v_4, kedy môžeme nastúpiť na autobus v každej mestskej časti?

Riešenie

Možnosti výberu spoja:

- spoj vychádza z danej mestskej časti
- spoj došiel z predchádzajúcej mestskej časti

Analýza problému

Kedy môžeme nastúpiť na autobus v mestskej časti $N1$?

$$\begin{aligned} v_1 &= \min\{u_1, \min\{d_{11}+v_1, d_{12}+v_2, d_{13}+v_3, d_{14}+v_4\}\} = \\ &= \min\{u_1, d_{14}+v_4\} \\ &= \min\{u_1, 1+v_4\} \end{aligned}$$

- $d_{14} = 1$ reprezentuje trvanie trasy z $N4$ do $N1$
- v_4 čas kedy je možné nastúpiť najskôr v $N4$

$$v_i = \min\{u_i, \min_j\{d_{ij}+v_j\}\}$$

Formálny zápis v min-plus algebre

Popis dopravného systému v klasickej algebre:

$$v_i = \min\{u_i, \min_j\{d_{ij} + v_j\}\}$$

Popis dopravného systému v min-plus algebre:

$$v_i = u_i \oplus' \sum_j^{\oplus'} d_{ij} \otimes' v_j$$

Maticový zápis: $v = u \oplus' D \otimes' v$

Riešenie dopravného problému

$$v = u \oplus' D \otimes' v$$

Opakovanou aplikáciou pravej strany rovnice dostávame

$$\begin{aligned} v &= u \oplus' D \otimes' (u \oplus' D \otimes' v) = \\ &= u \oplus' D \otimes' u \oplus' D^{[2]} \otimes' v = \\ &= \ldots = \\ &= u \oplus' D \otimes' u \oplus' D^{[2]} \otimes' u \oplus' D^{[3]} \otimes' u \oplus' \ldots \end{aligned}$$

Riešenie dopravného problému

Príklad:

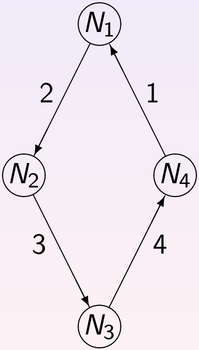
Pre dopravný systém daný maticou D a vektorom štartovacích časov $u = (9, 0, 2, \varepsilon')^\top$ vypočítajme $D \otimes' u$. Aká je interpretácia?

$$D \otimes' u = \begin{pmatrix} \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon' & 1 \\ 2 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon' & 3 & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon' & \varepsilon' & 4 & \varepsilon' \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \\ \varepsilon' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon' \\ 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Riešenie dopravného problému

$$u = (9,\ 0,\ 2,\ \varepsilon')^\top$$

$$D \otimes' u = (\varepsilon',\ 11,\ 3,\ 6)^\top$$



Riešenie dopravného problému

$$v = u \oplus' D \otimes' u \oplus' D^{[2]} \otimes' u \oplus' D^{[3]} \otimes' u \oplus' \dots$$

Interpretácia:

- u ... spoj vychádza z danej mestskej časti
- $D \otimes' u$ ... spoj došiel po absolvovaní jednej trasy
- $D^{[2]} \otimes' u$ ... spoj došiel po absolvovaní dvoch trás
- $\dots$

V našom príklade so 4 mestskými časťami, čakáme na spoj, ktorý

- vychádza z danej mestskej časti alebo
- došiel po absolvovaní jednej alebo dvoch alebo troch trás

Riešenie dopravného problému

Vo všeobecnosti s n mestskými časťami, čakáme na spoj, ktorý

- vychádza z danej mestskej časti alebo
- došiel po absolvovaní jednej až $n-1$ trás

$$v = u \oplus' D \otimes' u \oplus' D^{[2]} \otimes' u \oplus' D^{[3]} \otimes' u \oplus' \ldots \oplus' D^{[n-1]} \otimes' u$$

Riešenie dopravného problému

Použitím distributívneho zákona a binomickej vety dostávame

$$
\begin{aligned}
v &= u \oplus' D \otimes' u \oplus' D^{[2]} \otimes' u \oplus' D^{[3]} \otimes' u \oplus' \ldots \oplus' D^{[n-1]} \otimes' u = \\
&= \left(E' \oplus' D \oplus' D^{[2]} \oplus' D^{[3]} \oplus' \ldots \oplus' D^{[n-1]}\right) \otimes' u = \\
&= \left(E' \oplus' D\right)^{[n-1]} \otimes' u
\end{aligned}
$$

$$v = \left(E' \oplus' D\right)^{[n-1]} \otimes' u$$

Problém dopravného spojenia - Príklad

Príklad:

Majme dopravný systém v meste, ktorý sme predstavili v predošlých príkladoch. Nech D je matica systému

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon' & 1 \\ 2 & \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon' & 3 & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon' & \varepsilon' & 4 & \varepsilon' \end{pmatrix}$$

Predpokladajme, že autobusy štartujú z jednotlivých mestských častí nasledovne

- z mestskej časti N_1 v čase 9
- z mestskej časti N_2 v čase 0
- z mestskej časti N_3 v čase 2
- z mestskej časti N_4 neide žiaden autobus

Problém dopravného spojenia - Príklad

Úloha

Aké najskoršie môžu byť časy v_1, v_2, v_3 a v_4, kedy môžeme nastúpiť na autobus v každej mestskej časti?

Riešenie: $v = \left(E' \oplus' D\right)^{[n-1]} \otimes' u$

$$v = \left(E' \oplus' D\right)^{[3]} \otimes' u =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon' & \varepsilon' & 1 \\ 2 & 0 & \varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon' & 3 & 0 & \varepsilon' \\ \varepsilon' & \varepsilon' & 4 & 0 \end{pmatrix}^{[3]} \otimes' \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \\ \varepsilon' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & 3 \\ 5 & 3 & 0 & 6 \\ 9 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \\ \varepsilon' \end{pmatrix} =$$

$$= (7, 0, 2, 6)^\top$$

Ďakujem za pozornosť.