

Katedra matematiky  
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Technická univerzita v Košiciach

---

## GRAFOVÉ ALGORITMY A FORMÁLNA LOGIKA

Marián Klešč, Ján Plavka

Košice 2008

**RECENZOVALI:** RNDr. Vladimír Lacko, PhD.  
RNDr. Štefan Berežný, PhD.

Za odbornú stránku učebného textu zodpovedajú autori.  
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

---

©Marián Klešč, Ján Plavka

ISBN 978-80-553-0136-5

# Obsah

|                                                          |           |
|----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Úvod</b>                                              | <b>3</b>  |
| <b>1 Množiny a relácie</b>                               | <b>5</b>  |
| 1.1 Množiny a množinové operácie . . . . .               | 5         |
| 1.2 Binárne relácie . . . . .                            | 8         |
| 1.3 Ekvivalencia . . . . .                               | 11        |
| 1.4 Zobrazenia . . . . .                                 | 13        |
| 1.5 Úlohy . . . . .                                      | 15        |
| <b>2 Boolovská algebra</b>                               | <b>17</b> |
| 2.1 Čiastočne usporiadané množiny . . . . .              | 17        |
| 2.2 Zväzy . . . . .                                      | 19        |
| 2.3 Boolovské funkcie . . . . .                          | 23        |
| 2.4 Úlohy . . . . .                                      | 27        |
| <b>3 Grupy, telesá a polia</b>                           | <b>29</b> |
| 3.1 Grupy . . . . .                                      | 29        |
| 3.2 Cyklické grupy . . . . .                             | 32        |
| 3.3 Podgrupy a rozklady grúp . . . . .                   | 33        |
| 3.4 Okruhy, telesá, polia . . . . .                      | 35        |
| 3.5 Úlohy . . . . .                                      | 37        |
| <b>4 Neorientované grafy</b>                             | <b>39</b> |
| 4.1 Definícia a základné typy grafov . . . . .           | 39        |
| 4.2 Stupne vrcholov, súvislosť a metrika . . . . .       | 42        |
| 4.3 Eulerovskosť, hamiltonovskosť a planárnosť . . . . . | 45        |
| 4.4 Úlohy . . . . .                                      | 48        |
| <b>5 Orientované grafy</b>                               | <b>51</b> |
| 5.1 Definícia digrafu . . . . .                          | 51        |
| 5.2 Súvislosť a silná súvislosť . . . . .                | 52        |
| 5.3 Acyklické digrafy . . . . .                          | 54        |

|           |                                                   |            |
|-----------|---------------------------------------------------|------------|
| 5.4       | Úlohy . . . . .                                   | 55         |
| <b>6</b>  | <b>Grafy a matice</b>                             | <b>57</b>  |
| 6.1       | Maticové reprezentácie grafov . . . . .           | 57         |
| 6.2       | Úlohy . . . . .                                   | 61         |
| <b>7</b>  | <b>Stromy</b>                                     | <b>63</b>  |
| 7.1       | Stromy a ich vlastnosti . . . . .                 | 63         |
| 7.2       | Kostry a kružnice . . . . .                       | 65         |
| 7.3       | Úlohy . . . . .                                   | 68         |
| <b>8</b>  | <b>Aplikácie grafov a digrafov</b>                | <b>71</b>  |
| 8.1       | Minimálne cesty a spojenia . . . . .              | 71         |
| 8.1.1     | Dĺžka minimálnej cesty . . . . .                  | 71         |
| 8.1.2     | Dĺžka minimálneho spojenia . . . . .              | 73         |
| 8.2       | Minimálna kostra grafu . . . . .                  | 75         |
| 8.3       | Problém okružnej cesty . . . . .                  | 77         |
| 8.4       | Problém obchodného cestujúceho . . . . .          | 78         |
| 8.5       | Metóda kritickej cesty . . . . .                  | 80         |
| 8.6       | Toky v sieťach . . . . .                          | 82         |
| 8.7       | Úlohy . . . . .                                   | 87         |
| <b>9</b>  | <b>Formálna logika</b>                            | <b>89</b>  |
| 9.1       | Výroková logika . . . . .                         | 89         |
| 9.2       | Logické spojky . . . . .                          | 90         |
| 9.3       | Pravdivostná hodnota . . . . .                    | 94         |
| 9.4       | Formuly výrokovej logiky . . . . .                | 95         |
| 9.5       | Ekvivalencia formúl . . . . .                     | 99         |
| 9.6       | Realizácia boolovských funkcií . . . . .          | 102        |
| 9.7       | Minimálna realizácia boolovskej formuly . . . . . | 103        |
| 9.8       | Relácia vyplývania . . . . .                      | 106        |
| 9.9       | Výrokový kalkul . . . . .                         | 108        |
| 9.10      | Úlohy . . . . .                                   | 110        |
| <b>10</b> | <b>Predikátová logika</b>                         | <b>111</b> |
| 10.1      | Predikát . . . . .                                | 111        |
| 10.2      | Predikátový kalkul . . . . .                      | 116        |
| 10.3      | Úlohy . . . . .                                   | 117        |
|           | <b>Literatúra</b>                                 | <b>118</b> |

# Úvod

Cieľom tejto učebnice je ponúknuť študentom studijných programov Informatika a Aplikovaná informatika učebnú látku zameranú na grafové algoritmy a formálnu logiku. Publikácia nemá nahradiť prednášky z daného predmetu, ale pomôcť študentom v systematickom zorientovaní sa v predmete.

Učebná látka je členená do desiatich kapitol, za ktorými sú úlohy na samostatné precvičovanie preberaného učiva.

V prvých dvoch kapitolách sú základné poznatky o binárnych reláciách, zobrazeniach, čiastočne usporiadaných množinách a zväzoch, ktoré vyúsťujú do boolovskej algebry a použitia boolovských funkcií.

Tretia kapitola je venovaná algebraickým systémom s jednou aj s dvoma binárnymi operáciami.

Ďalšie kapitoly, štvrtá až ôsma, sú postupne venované neorientovaným aj orientovaným grafom, stromom, využitiu maticového počtu pri spracovaní úloh pomocou grafov a aplikácií grafov pri riešení konkrétnych úloh. Na záver je ukážka využitia teórie grafov v transportných sieťach pri určovaní maximálnych tokov.

Deviata a desiatka kapitola je venovaná formálnej logike. V deviatej kapitole sa venujeme výrokovej logike, v ktorej základné formuly nemajú žiadnu vnútornú stavbu a jediným ich atribútom je ich pravdivostná hodnota. Ďalšia kapitola pojednávajú o predikátovej logike, ktorá pracuje so základnými formulami vypovedajúcimi o vlastnostiach a vzťahoch medzi predmetmi istého univerza.

Autori vyslovujú poďakovanie RNDr. Vladimírovi Lackovi, PhD. a RNDr. Štefanovi Berežnému, PhD., ktorí starostlivo prečítali rukopis a cennými radami prispeli k jeho skvalitneniu.



# Kapitola 1

## Množiny a relácie

### 1.1 Množiny a množinové operácie

Jedným zo základných pojmov v matematike je pojem množiny. Nebudeme ho definovať, ale budeme ho chápať v intuitívnom zmysle. Pod **množinou** rozumieme súhrn (skupinu, súbor) nejakých navzájom odlišných objektov, ktoré podľa nejakého kritéria tvoria jeden celok.

Množinu považujeme za určenú, ak o každom objekte vieme rozhodnúť, či je alebo nie je prvkom danej množiny. Množiny budeme označovať pomocou veľkých písmen:

$$A, B, \dots, X, Y, \dots, M, N, \dots$$

a podobne, a prvky množín budeme označovať malými písmenami  $a, b, \dots, x, y, \dots, m, n, \dots$ . Skutočnosť, že  $a$  je prvkom množiny  $A$  zapíšeme

$$a \in A .$$

Ak  $a$  nie je prvkom množiny  $A$ , tak zapíšeme

$$a \notin A .$$

Namiesto  $a$  je (nie je) prvkom množiny  $A$  zvykneme hovoriť aj  $a$  patrí (nepatrí) do množiny  $A$ .

Množinu, ktorá neobsahuje žiadny prvok, nazývame **prázdnu množinou** a označujeme ju symbolom  $\emptyset$ .

Poznáme rôzne spôsoby určenia množín. Ak množina  $M$  obsahuje konečný počet prvkov  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , vtedy používame zápis

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} .$$

Uvedomme si, že

$$D = \{0\}$$

je neprázdna množina obsahujúca jeden prvok 0, a preto  $D \neq \emptyset$ . Stretávame sa aj s množinami, ktoré sú určené takto:  $K$  je množina všetkých prvkov  $x \in B$ , ktoré majú vlastnosť  $P$ . V tomto prípade píšeme:

$$K = \{x \in B; P(x)\}.$$

Niektoré množiny, hlavne číselné, majú všeobecne zaužívané označenia. Tak napríklad pre množinu všetkých **prirodzených** čísel, t.j. množinu  $\{1, 2, 3, \dots\}$ , používame symbol  $\mathbb{N}$ . Množinu všetkých **celých** čísel označujeme  $\mathbb{Z}$ . Racionálne čísla sú zlomky s celočíselným čitateľom aj menovateľom. Množinu všetkých **racionálnych** čísel označujeme  $\mathbb{Q}$ . Znak  $\mathbb{R}$  je symbolom pre množinu všetkých **reálnych** a  $\mathbb{C}$  pre množinu všetkých **komplexných** čísel.

**Príklad 1.1.**

$$P = \{x \in \mathbb{N}; 3 < x^2 < 30\}$$

je množina všetkých prirodzených čísel, ktorých druhá mocnina je väčšia než 3 a menšia ako 30, teda

$$P = \{2, 3, 4, 5\}.$$

**Definícia 1.1.** Množina  $A$  je **podmnožinou** množiny  $B$  práve vtedy, ak každý prvok množiny  $A$  patrí aj do množiny  $B$ . Zapisujeme

$$A \subset B.$$

Je zrejmé, že  $A = B$  práve vtedy, keď  $A \subset B$  a súčasne aj  $B \subset A$ . Každá neprázdna množina  $A$  obsahuje najmenej dve podmnožiny a to  $\emptyset$  a  $A$ .

**Definícia 1.2.** **Potenčná množina** množiny  $A$  je množina  $\mathcal{P}(A)$ , ktorej prvkami sú všetky podmnožiny množiny  $A$ .

Napríklad, ak  $A = \{1, 2, 3\}$ , tak

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Predpokladajme, že všetky množiny, s ktorými pracujeme, sú prvkami istej univerzálnej množiny  $U$ .

**Definícia 1.3.** **Zjednotenie** množín  $A$  a  $B$  je množina

$$A \cup B = \{x \in U; x \in A \text{ alebo } x \in B\}$$

a **prienik** množín  $A$  a  $B$  je množina

$$A \cap B = \{x \in U; x \in A \text{ a } x \in B\}.$$

Teda do  $A \cup B$  patria práve tie prvky, ktoré sú prvkami aspoň jednej z množín  $A$  a  $B$ , a do  $A \cap B$  patria práve tie prvky, ktoré sú prvkami množiny  $A$  aj množiny  $B$ .

**Definícia 1.4.** Rozdiel množín  $A$  a  $B$  je množina

$$A \setminus B = \{x \in U; x \in A \text{ a } x \notin B\}.$$

čiže prvkami množiny  $A \setminus B$  sú tie prvky množiny  $A$ , ktoré nepatria do  $B$ .

**Definícia 1.5.** Komplement (doplnok) množiny  $A$  je množina

$$\overline{A} = U \setminus A.$$

Operáciu zjednotenia a prieniku môžeme rozšíriť na ľubovoľný počet množín. Nech  $I$  je množina, ktorej budeme hovoriť množina indexov a pre každé  $i \in I$  je definovaná množina  $A_i \subset U$ . Hovoríme, že je daný systém množín  $\{A_i; i \in I\}$ .

**Definícia 1.6.** Zjednotenie systému množín  $\{A_i; i \in I\}$  je množina  $\bigcup_{i \in I} A_i$  práve tých prvkov  $z U$ , ktoré patria do niektorej z množín  $A_i$ .

**Prienik** systému množín  $\{A_i; i \in I\}$  je množina  $\bigcap_{i \in I} A_i$  práve tých prvkov  $z U$ , ktoré patria do všetkých množín  $A_i$ .

**Poznámka.** Ak  $I = \{1, 2, \dots, k\}$ , tak systém množín je  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ . Ich zjednotenie a prienik označujeme

$$\bigcup_{i=1}^k A_i \text{ a } \bigcap_{i=1}^k A_i.$$

**Definícia 1.7.** Rozklad množiny  $A \neq \emptyset$  je taký systém  $\{A_i; i \in I\}$ , pre ktorý platí

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A \text{ a } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pre } i, j \in I, i \neq j.$$

**Veta 1.1.** Nech  $A, B$  a  $C$  sú podmnožiny množiny  $U$ . Potom platí:

- |                                                               |                                                           |
|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 1. $A \cup B = B \cup A,$                                     | $A \cap B = B \cap A,$                                    |
| 2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$                   | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$                  |
| 3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$          | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$         |
| 4. $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A,$                 | $A \cap U = U \cap A = A,$                                |
| 5. $A \cup \overline{A} = \overline{A} \cup A = U,$           | $A \cap \overline{A} = \overline{A} \cap A = \emptyset,$  |
| 6. $\overline{(\overline{A})} = A,$                           |                                                           |
| 7. $A \cup A = A,$                                            | $A \cap A = A,$                                           |
| 8. $A \cup U = U,$                                            | $A \cap \emptyset = \emptyset,$                           |
| 9. $A \cup (A \cap B) = A,$                                   | $A \cap (A \cup B) = A,$                                  |
| 10. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B},$ | $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}.$ |

Tvrdeniam 10 vety 1.1 hovoríme **de Morganove pravidlá**. Vetu 1.1 nebudeme dokazovať, čitateľ si jednotlivé vlastnosti môže overiť pomocou tzv. Venových diagramov.

## 1.2 Binárne relácie

Je pozoruhodné, ako veľa matematických pojmov sa dá vyjadriť pomocou množín a rôznych množinových konštrukcií. Je to prekvapivé hlavne preto, že teória množín bola do matematiky zavedená pomerne nedávno. Dnes sa však už stala súčasťou bežného matematického vyjadrovania a je jazykom, ktorý napomáha chápať matematiku ako jeden celok so spoločnými základmi. Ukážeme si, ako sa pomocou jednoduchých množinových prostriedkov môžu definovať ďalšie matematické pojmy.

Ak  $x$  a  $y$  sú prvky (nejakej množiny), potom symbol  $\{x, y\}$  označuje množinu obsahujúcu práve prvky  $x$  a  $y$  a nazýva sa **neusporiadaná dvojica** prvkov  $x$  a  $y$ . Pripomeňme, že  $\{x, y\}$  je to isté ako  $\{y, x\}$ . Zavedieme tiež označenie  $(x, y)$  pre **usporiadanú dvojicu** prvkov  $x$  a  $y$ . V tomto prípade závisí na poradí prvkov v zátvorkách. Podobne definujeme **usporiadanú  $n$ -ticu** prvkov  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , ktorú budeme označovať  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Platí, že

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \text{ práve vtedy ak } x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n.$$

**Definícia 1.8. Karteziánsky súčin**  $A \times B$  množín  $A$  a  $B$  je množina všetkých usporiadaných dvojíc  $(a, b)$ , kde  $a \in A$  a  $b \in B$ . Formálne zapisujeme

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

Karteziánsky súčin  $A \times A$  niekedy zapisujeme ako mocninu, t.j.  $A^2$ , a podobne  $A^3 = A \times A \times A$  atď.

Je zrejmé, že  $C \times \emptyset = \emptyset \times C$  pre ľubovoľnú množinu  $C$ .

**Definícia 1.9. Binárna relácia** z množiny  $A$  do množiny  $B$  je ľubovoľná podmnožina  $\mathcal{R}$  karteziánskeho súčinu  $A \times B$ . Ak  $A = B$ , hovoríme o binárnej relácii na množine  $A$ , čo je ľubovoľná podmnožina  $\mathcal{R} \subset A^2$ .

Ak nemôže dôjsť k omylu a je jasné, že sa jedná o binárnu reláciu, slovo *binárna* môžeme vynechať a hovoriť iba o relácii.

**Poznámka** Binárna relácia  $\mathcal{R}$  je množina, a teda by sme mali použiť symbol pre množinu, t.j.  $R$ . Symbol  $\mathcal{R}$  budeme používať preto, aby sme jasne rozlíšili, že sa jedná o reláciu.

Ak  $(a, b) \in \mathcal{R}$ , hovoríme, že *prvok  $a$  je v relácii  $\mathcal{R}$  s prvkom  $b$*  a zapisujeme  $a\mathcal{R}b$ . Analogicky namiesto  $(a, b) \notin \mathcal{R}$  píšeme  $a\overline{\mathcal{R}}b$ .

Názov *karteziánsky súčin* pochádza z geometrickej interpretácie (a pôvodne teda z mena Descartes): Keď napríklad  $A = B = R$ , potom  $A \times B$  môžeme interpretovať ako všetky body roviny a v tomto prípade  $x$  a  $y$  sú (karteziánske) súradnice bodu  $(x, y)$  roviny. Toto znázornenie používame nielen pre číselné množiny, ale napríklad aj pre karteziánsky súčin konečných množín. Binárnu reláciu potom

znázorňujeme ako množinu v rovine, ktorá je podmnožinou množiny znázorňujúcej karteziánsky súčin. Hovoríme tomu **grafická interpretácia** binárnej relácie.

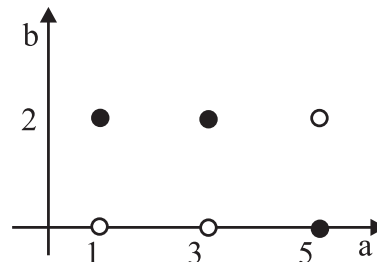
**Príklad 1.2.** Nech  $A = \{1, 3, 5\}$ , a  $B = \{0, 2\}$ . Nájdite a graficky znázornite reláciu  $\mathcal{R}$ , ktorá je definovaná:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow |a-2| = |2b-3|, \quad a \in A, \quad b \in B.$$

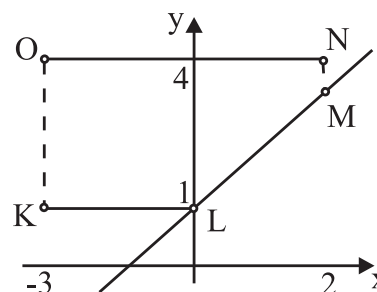
**Riešenie.** Výpočtom zistíme, že  $\mathcal{R} = \{(5, 0), (1, 2), (3, 2)\}$ . Grafická interpretácia je na obr. 1.1. Plné krúžky sú prvkami množiny  $\mathcal{R}$ , všetky krúžky (plné aj prázdne) sú prvkami karteziánskeho súčinu  $A \times B$ .

**Príklad 1.3.** Majme podmnožiny reálnych čísel  $X = \{x; -3 < x < 2\}$  a  $Y = \{y; 1 \leq y \leq 4\}$ . Nájdite a graficky znázornite reláciu  $\mathcal{R}$ , ktorá je definovaná:  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y \leq x + 1$ .

**Riešenie.**  $\mathcal{R}$  je časť roviny (päťuholník KLMNO) z obr. 1.2.



Obr. 1.1



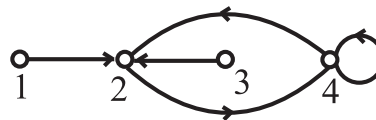
Obr. 1.2

ďalšími vhodnými interpretáciami binárnej relácie sú **maticová** a **grafová**. Ak  $\mathcal{R} \subset A \times B$ ,  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ,  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ , môžeme  $\mathcal{R}$  zapísať pomocou matice  $\mathbf{M} = (m_{i,j})$  typu  $(n, m)$ , kde

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ak } a_i\mathcal{R}b_j, \\ 0, & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

Pri grafovej interpretácii (presnú definíciu grafu uvidíme neskôr) prvky množín  $A$  a  $B$  znázorňujeme krúžkami, ktoré budeme nazývať **vrcholy**. Usporiadanú dvojicu  $(a_i, b_j)$  znázorníme **šípkou** v smere od  $a_i$  k  $b_j$ , ktorú nazývame **orientovaná hrana**. Tak napríklad pre reláciu  $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 4), (3, 2), (4, 2), (4, 4)\}$  na množine  $\{1, 2, 3, 4\}$  máme maticu

$$\mathbf{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Obr. 1.3

a grafová reprezentácia je obr. 1.3.

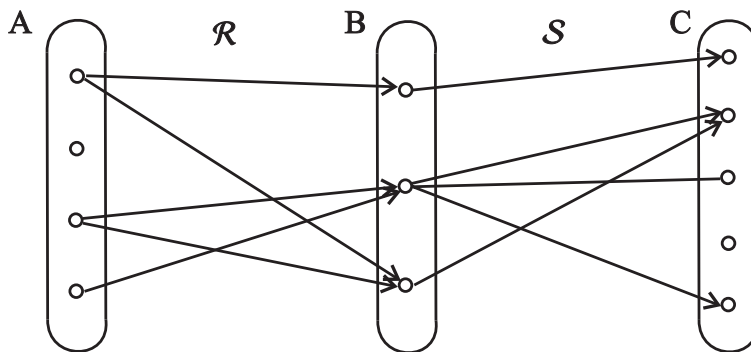
**Definícia 1.10.** Inverzná relácia  $k$  binárnej relácii  $\mathcal{R}$  je binárna relácia  $\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a); (a, b) \in \mathcal{R}\}$ , pričom  $a \in A$  a  $b \in B$ .

Je zrejmé, že

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b\mathcal{R}^{-1}a \quad \text{a} \quad (\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}.$$

**Definícia 1.11.** Nech  $A, B, C$  sú množiny,  $\mathcal{R} \subset A \times B$  je relácia z  $A$  do  $B$ , a  $\mathcal{S} \subset B \times C$  je relácia z  $B$  do  $C$ . **Súčinom binárnych relácií (zložením)**  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{S}$  nazveme binárnu reláciu  $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} \subset A \times C$  takú, že pre  $a \in A$  a  $c \in C$  je  $a(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})c$  práve vtedy, ak existuje aspoň jedno  $b \in B$  také, že  $a\mathcal{R}b$  a zároveň  $b\mathcal{S}c$ . Súčin relácii  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{S}$  tiež niekedy označujeme  $\mathcal{RS}$ .

Súčin relácii sa dá dobre znázorniť pomocou grafovej reprezentácie. Na obr. 1.4 je vidieť, že dvojica  $(a, c)$  je v relácii  $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$  vždy keď z  $a$  do  $c$  sa dá dostať po orientovaných hranách cez nejaké  $b$  z množiny  $B$ .



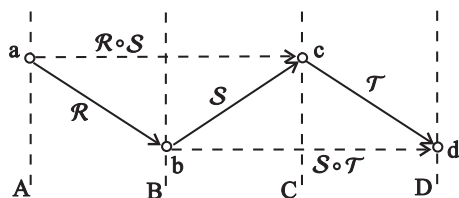
Obr. 1.4

Všimnime si, že súčin nie je definovaný pre každé dve binárne relácie. Aby sa dali relácie skladať, musia mať spoločnú „prostrednú“ množinu (v definícii sme ju označili  $B$ ). Ak sú však  $\mathcal{R}$  aj  $\mathcal{S}$  relácie na tej istej množine, ich súčin je vždy dobre definovaný. V tomto prípade záleží na poradí skladania, t.j.  $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$  je vo všeobecnosti iná relácia ako  $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ .

**Veta 1.2.** Pre súčin binárnych relácií platí asociatívny zákon. Ak  $\mathcal{R} \subset A \times B$ ,  $\mathcal{S} \subset B \times C$  a  $\mathcal{T} \subset C \times D$  sú binárne relácie, tak

$$(\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{T} = \mathcal{R} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{T}).$$

Dôkaz vety vyplýva z Definície 1.11 a zo schémy na obr. 1.5.



Obr. 1.5

**Poznámka.** Pojem binárnej relácie môžeme zovšeobecniť. Nech  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sú ľubovoľné množiny. Karteziánsky súčin  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  množín  $A_1, A_2, \dots, A_n$  je množina všetkých usporiadaných  $n$ -tíc  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , kde  $a_i \in A_i$  pre všetky  $i = 1, 2, \dots, n$ . špeciálne, ak  $A_1 = A_2 = \dots = A_n$ , potom  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = A^n$  je množina všetkých usporiadaných  $n$ -tíc prvkov množiny  $A$ . Potom  $n$ -árna relácia je ľubovoľná podmnožina karteziánskeho súčinu  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ .

## 1.3 Ekvivalencia

V tejto časti textu sa budeme zaoberať iba binárnymi reláciami *na množine*, t.j. keď  $\mathcal{R} \subset A \times A$ .

**Definícia 1.12.** Binárna relácia  $\mathcal{R}$  na množine  $A$  sa nazýva:

**reflexívna**, ak pre všetky  $a \in A$  platí  $a\mathcal{R}a$ ;

**symetrická**, ak pre všetky  $a, b \in A$  platí, že ak  $a\mathcal{R}b$ , tak aj  $b\mathcal{R}a$ ;

**antisymetrická**, ak pre všetky  $a, b \in A$  platí, že ak  $a\mathcal{R}b$  aj  $b\mathcal{R}a$ , tak  $a = b$ ;

**tranzitívna**, ak pre všetky  $a, b, c \in A$  platí, že ak  $a\mathcal{R}b$  a  $b\mathcal{R}c$ , tak aj  $a\mathcal{R}c$ .

Ak znázorňujeme reláciu pomocou matice, tak matica odpovedajúca reflexívnej relácii má na hlavnej diagonále len jedničky. Matica reprezentujúca symetrickú reláciu je symetrická podľa hlavnej diagonály. Pri grafovej reprezentácii reflexívnej relácii odpovedá graf s orientovanou slučkou pri každom vrchole. V grafe reprezentujúcom symetrickú reláciu každú dvojicu vrcholov spájajú orientované hrany v oboch smeroch. Aj podmienka tranzitívnosti sa dá dobre vyjadriť pomocou orientovaných hrán: ak sú v grafe hrany z  $x$  do  $y$  a z  $y$  do  $z$ , musí tam byť aj hrana z  $x$  do  $z$ .

**Definícia 1.13.** Hovoríme, že relácia  $\mathcal{R}$  na množine  $A$  je **ekvivalencia** na množine  $A$ , ak je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Pojem ekvivalencie je zastrešujúci pojem pre všetky pojmy vyjadrujúce rovnakosť, podobnosť, izomorfizmus atď. často sa relácia ekvivalencie zvykne označovať symbolmi  $=, \equiv, \simeq, \approx, \cong, \dots$ . Príklady ekvivalencie sa vyskytujú napríklad v geometrii: podobnosť trojuholníkov, rovnobežnosť priamok a podobne.

Nech  $\mathcal{R}$  je ekvivalencia na množine  $A$  a nech  $a$  je ľubovoľný prvok množiny  $A$ . Označme symbolom  $\mathcal{R}[a]$  množinu všetkých prvkov  $x$ , ktoré sú v relácii s prvkom  $a$  (teda  $\mathcal{R}[a] = \{x; a\mathcal{R}x\}$ ).  $\mathcal{R}[a]$  sa nazýva **trieda ekvivalencie**  $\mathcal{R}$  určená prvkom  $a$ .

Platí nasledujúca

**Veta 1.3.** Pre každú ekvivalenciu  $\mathcal{R}$  na množine  $A$  platí

(i)  $\mathcal{R}[a]$  je neprázdna množina pre každý prvok  $a \in A$ .

- (ii) Pre každé dva prvky  $a, b$  z množiny  $A$  buď  $\mathcal{R}[a] = \mathcal{R}[b]$ , alebo  $\mathcal{R}[a] \cap \mathcal{R}[b] = \emptyset$ .
- (iii) Triedy ekvivalencie jednoznačne určujú (popisujú) reláciu  $\mathcal{R}$ .

Skôr, ako pristúpime k dôkazu, vysvetlíme zmysel bodu (iii). Presný význam je nasledujúci: Ak sú  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{S}$  dve ekvivalencie na množine  $A$  a pre každý prvok  $a$  z množiny  $A$  platí rovnosť  $\mathcal{R}[a] = \mathcal{S}[a]$ , potom  $\mathcal{R} = \mathcal{S}$ .

**Dôkaz.** (i) Množina  $\mathcal{R}[a]$  vždy obsahuje aspoň prvok  $a$ , pretože  $\mathcal{R}$  je reflexívna relácia.

(ii) Nech  $a, b$  sú dané prvky. Ak  $a\mathcal{R}b$ , ukážeme najprv že  $\mathcal{R}[a] \subset \mathcal{R}[b]$ . Je to tak, pretože ak nejaké  $x \in \mathcal{R}[a]$ , potom  $a\mathcal{R}x$  a zo symetrie vyplýva, že aj  $x\mathcal{R}a$ . Keďže  $x\mathcal{R}a$  a  $a\mathcal{R}b$ , z tranzitívnosti vyplýva že aj  $x\mathcal{R}b$ . Ak opäť použijeme symetriu, máme  $b\mathcal{R}x$ , čo znamená, že  $x \in \mathcal{R}[b]$ , a teda  $\mathcal{R}[a] \subset \mathcal{R}[b]$ . Podobne sa ukáže, že aj  $\mathcal{R}[b] \subset \mathcal{R}[a]$ , z čoho vyplýva, že  $\mathcal{R}[a] = \mathcal{R}[b]$ .

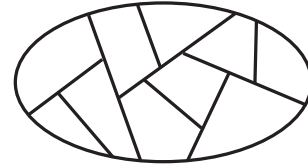
Teraz ukážeme, že ak neplatí  $a\mathcal{R}b$ , tak  $\mathcal{R}[a] \cap \mathcal{R}[b] = \emptyset$ . Postupujeme sporom: Nech existuje  $x \in \mathcal{R}[a] \cap \mathcal{R}[b]$ . Potom  $a\mathcal{R}x$  a zo symetrie aj  $x\mathcal{R}b$ . Z tranzitívnosti dostávame  $a\mathcal{R}b$ , čo je spor.

(iii) Táto časť tvrdenia vety je zrejmá, pretože triedy ekvivalencie  $\mathcal{R}$  určujú  $\mathcal{R}$  vzťahom

$$a\mathcal{R}b \quad \text{práve vtedy, ak} \quad \{a, b\} \subset \mathcal{R}[a].$$

□

Obrázok 1.6 znázorňuje tvrdenia vety 1.3. Podmnožiny danej množiny  $A$ , ktoré sú navzájom disjunktné a ktoré spolu obsahujú všetky prvky množiny  $A$ , tvoria *rozklad* množiny  $A$  (pozri definíciu 1.7). Tvrdenia vety zaručujú, že triedy ekvivalencie tvoria rozklad množiny a že vzťah medzi všetkými ekvivalenciami na danej množine  $A$  a všetkými rozkladmi množiny  $A$  je vzájomne jednoznačný.



Obr. 1.6

Uvedieme si jednu konkrétnu ekvivalenciu, ktorá rozkladá množinu celých čísel. Hovoríme, že nenulové celé číslo  $b$  **delí** celé číslo  $a$ , ak existuje také celé číslo  $q$ , že  $a = b \cdot q$ . Zapisujeme to symbolom  $b|a$ .

Nech  $m \in \mathbb{N}$  a nech

$$\mathcal{R}_m = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; m|(a - b)\}.$$

Ukážeme si, že binárna relácia  $\mathcal{R}_m$  na množine  $\mathbb{Z}$  je ekvivalencia. Reflexívnosť platí, pretože pre každé  $a \in \mathbb{Z}$  je  $a - a = 0$  a nulu delí každé nenulové číslo, teda aj naše dopredu zvolené číslo  $m$ . Je zrejmé, že pre ľubovoľné  $a, b \in \mathbb{Z}$ , ak  $m|(a - b)$ , tak aj  $m|(b - a)$  a relácia je symetrická. Uvažujme teraz ľubovoľné  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , pre ktoré platí že  $m|(a - b)$  a tiež  $m|(b - c)$ . Potom existujú celé

čísla  $q_1$  a  $q_2$  také, že  $a - b = m \cdot q_1$  a  $b - c = m \cdot q_2$ . Z toho však vyplýva, že  $a - c = (a - b) + (b - c) = m \cdot (q_1 + q_2)$ , kde  $q_1 + q_2 \in \mathbb{Z}$ , a teda  $m|(a - c)$ . Tým sme ukázali, že relácia je aj tranzitívna. Keďže sa jedná o ekvivalenciu, môžeme teraz zostrojiť množinu tried ekvivalencie

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\},$$

ktoré tvoria rozklad množiny všetkých celých čísel  $\mathbb{Z}$ , pričom trieda  $\bar{k}$  ( $0 \leq k \leq n-1$ ) má tvar

$$\bar{k} = \{\dots, -2m+k, -m+k, k, m+k, 2m+k, \dots\}.$$

Množinu  $\mathbb{Z}_m$  nazývame **množinou všetkých zvyškových tried** množiny  $\mathbb{Z}$  podľa modulu  $m$ . Napríklad pre  $m = 5$  dostávame:

$$\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\},$$

kde

$$\begin{aligned}\bar{0} &= \{\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\}, \\ \bar{1} &= \{\dots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots\}, \\ \bar{2} &= \{\dots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots\}, \\ \bar{3} &= \{\dots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots\}, \\ \bar{4} &= \{\dots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \dots\}.\end{aligned}$$

## 1.4 Zobrazenia

Pojem zobrazenie sa zhoduje s pojmom funkcie a je jedným zo základných pojmov v matematike. Trvalo dosť dlho, kým sa dospelo k dnešnému chápaniu zobrazenia ako špeciálneho typu binárnej relácie. Ešte v nedávnej dobe sa uvažovali iba reálne alebo komplexné funkcie a „poctivá“ funkcia musela byť vyjadrená nejakým vzorcom alebo súčtom nekonečného radu.

**Definícia 1.14. Zobrazenie** z množiny  $A$  do množiny  $B$  je binárna relácia  $f \subset A \times B$  s vlastnosťami:

- a) ku každému  $a \in A$  existuje  $b \in B$  tak, že  $(a, b) \in f$ ,
- b) ak  $(a, b) \in f$  a  $(a, c) \in f$ , tak  $b = c$ .

Namiesto slova *zobrazenie* sa v rovnocennom význame často používa slovo *funkcia*. Teda zobrazenie  $f$  z množiny  $A$  do množiny  $B$  môžeme chápať ako pravidlo, ktoré každému prvku  $a \in A$  priradí práve jeden prvok  $b$  z množiny  $B$ . To, že  $f$  je zobrazenie z množiny  $A$  do množiny  $B$ , zapisujeme takto:  $f : A \rightarrow B$ . Prvok  $a$  je **vzorom** prvku  $b$  a prvok  $b$  je **obrazom** prvku  $a$  pri zobrazení  $f$ . Namiesto

$$afb \quad \text{alebo} \quad (a, b) \in f$$

obvykle píšeme

$$b = f(a).$$

Všetky tri zápisy vyjadrujú to isté: prvok  $a$  je v relácii s prvkom  $b$ .

**Poznámka.** Všimnime si, že aj keď zobrazenie je reláciou, nepoužíva sa na jeho označenie veľké písmeno ako pre reláciu, ale malé. čitateľ sa určite častejšie stretával so zápisom  $y = f(x)$ , teda s prípadom funkcie (zobrazenia) z množiny  $X$  do množiny  $Y$ . Je to to isté, ak si uvedomíme, že množiny  $A$  a  $B$  v definícii zobrazenia boli ľubovoľné.

**Príklad 1.4.** Nech  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ . Potom

$$f_1 = \{(1, 2), (2, 2), (3, 4)\}$$

je zobrazenie, ale

$$f_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

nie je zobrazenie, lebo nie je splnená vlastnosť b) definície 1.14 a ani

$$f_3 = \{(1, 2), (2, 3)\}$$

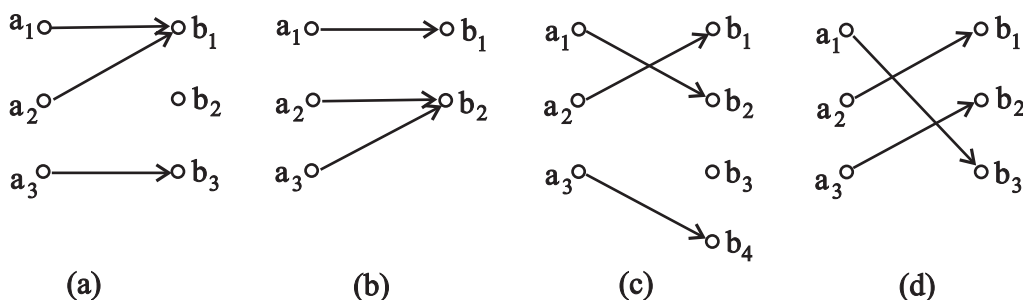
nie je zobrazenia, lebo nie je splnená vlastnosť a) definície 1.14.

**Definícia 1.15.** Zobrazenie  $f : A \rightarrow B$  sa nazýva:

**surjektívne**, ak ku každému  $b \in B$  existuje aspoň jedno  $a \in A$  tak, že  $b = f(a)$ ,

**injektívne**, ak z  $a_1 \neq a_2$ ,  $a_1, a_2 \in A$  vyplýva  $f(a_1) \neq f(a_2)$ ,

**bijektívne**, ak je surjektívne aj injektívne.



Obr. 1.7

Na obr. 1.7 sú znázornené jednotlivé typy zobrazení. Zobrazenie (a) nie je surjektívne ani injektívne, (b) je surjektívne, ale nie je injektívne, (c) je injektívne, ale nie je surjektívne a (d) je surjektívne aj injektívne, teda bijektívne.

Každé zobrazenie  $f$  je binárne relácia z  $A$  do  $B$ , preto existuje aj binárna relácia  $f^{-1}$  z  $B$  do  $A$ , ktorá vo všeobecnosti nie je zobrazením (funkciou).

**Veta 1.4.** *Nech  $f$  je zobrazenie z  $A$  do  $B$ . Potom  $f^{-1}$  je zobrazenie z  $B$  do  $A$  práve vtedy, ak  $f$  je bijektívne zobrazenie.*

**Dôkaz.** Nech  $f^{-1}$  je zobrazenie z  $B$  do  $A$ . Potom každý prvok  $b \in B$  má práve jeden obraz  $f^{-1}(b) \in A$ , a teda každý prvok  $b \in B$  je obrazom práve jedného prvku z  $A$  v zobrazení  $f$ , čo je bijektivnosť zobrazenia  $f$ .

Naopak, nech  $f$  je bijektívne zobrazenie z  $A$  do  $B$ . Potom každý prvok  $b \in B$  má práve jeden vzor v množine  $A$ , a teda  $f^{-1}$  je zobrazenie, lebo každý prvok  $b \in B$  má práve jeden obraz  $f^{-1}(b) \in A$ .  $\square$

**Definícia 1.16.** *Majme zobrazenia  $f : A \rightarrow B$  a  $g : B \rightarrow C$ . **Súčinom** (zložením) zobrazení  $f$  a  $g$  je zobrazenie  $h : A \rightarrow C$  definované predpisom*

$$h(a) = g(f(a))$$

pre každé  $a \in A$ .

Zobrazenie  $h$  budeme označovať  $g \circ f$ . Platí teda  $(g \circ f)(a) = g(f(a))$  pre každý prvok  $a \in A$ . Je tu odlišnosť oproti súčinu relácií, kde sa skladanie zapisuje v poradí „zľava doprava“. Pri zobrazeniach skladanie zapisujeme „sprava doľava“.

Pre súčin zobrazení platí asociatívny zákon, ale nie komutatívny. Ak má  $f \circ g$  zmysel, potom  $g \circ f$  vôbec nemusí byť definované.

## 1.5 Úlohy

1.1. Majme množiny  $S = \{1, 2, 3, 5\}$  a  $T = \{-3, 0, 7\}$ . Utvorte  $S \times T$ ,  $T \times S$ ,  $S \times S$  a  $T \times T$ .

1.2. Je daná množina  $L = \{(1, 0), (0, 1), (2, 1), (0, 0), (2, 2), (0, 2), (2, 0)\}$ . Rozhodnite, či existujú také množiny  $M$  a  $P$ , pre ktoré by platilo  $L = M \times P$ .

1.3. Nájdite bijektívne zobrazenie množiny  $A \times B$  na množinu  $B \times A$  pre dve zvolené množiny  $A$  a  $B$ .

1.4. Zistite, ktoré z vlastností reflexívnosť, symetrickosť, antisymetrickosť, tranzitívnosť platia v nasledujúcich binárnych reláciách:

a)  $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2; y = x + 1\}$ ,

b)  $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2; y > x\}$ ,

c)  $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; |x - y| = 1\}$ ,

d)  $\mathcal{R}_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; |x - y| \leq m, m \in \mathbb{N}, (m - \text{ pevne zvolené})\}$ ,

e)  $\mathcal{R}_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq y\}$ ,

f)  $\mathcal{R}_6 = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2; x = y\}$ , pričom  $A$  je ľubovoľná množina.

1.5. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich binárnych relácií sú ekvivalencie. V prípade ekvivalencie nájdite aj triedy ekvivalencií:

- a) „Mať rovnaký polomer ako“ na množine kružníc v rovine,
- b)  $|x - y| \leq 1$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ,
- c)  $|x| = |y|$ ,  $x, y \in \mathbb{C}$ .

1.6. Utvorte množinu  $\mathbb{Z}_6$  zvyškových tried množiny  $\mathbb{Z}$ .

1.7. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich zobrazení je injektívne, surjektívne, bijektívne:

- a)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(n) = 2n$  pre všetky  $n \in \mathbb{N}$ ,
- b)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = x - 1$  pre všetky  $x \in \mathbb{Z}$ ,
- c)  $f : \langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$ ,  $f(x) = \sin x$  pre všetky  $x \in \langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ .

# Kapitola 2

## Boolovská algebra

### 2.1 Čiastočne usporiadané množiny

čitateľ určite pozná usporiadanie množiny prirodzených čísel alebo iných číselných množín podľa veľkosti. Takéto usporiadanie sa v matematike chápe ako špeciálny typ relácie, t.j. ako vzťah dvojice čísel, a relácia sa obyčajne označuje symbolom „ $\leq$ “ (menší alebo rovný). Iné binárne relácie nám umožňujú usporiadať množiny (nielen číselné) podľa iných kritérií.

**Definícia 2.1.** Relácia čiastočného usporiadania na nejakej množine  $A \neq \emptyset$  je každá relácia na množine  $A$ , ktorá je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

Príkladmi relácií čiastočného usporiadania sú napr.: relácia deliteľnosti  $|$  na množine  $\mathbb{N}$ , relácia inklúzie  $\subset$  na systéme množín, usporiadanie čísel podľa veľkosti  $\leq$  na  $\mathbb{R}$ , .... Ak nebudeme presne špecifikovať, o akú binárnu reláciu sa jedná, budeme na označenie relácie čiastočného usporiadania používať symbol  $\preceq$ . Potom môžeme definíciu 2.1 sformulovať takto:

**Definícia 2.2.** Nech  $A \neq \emptyset$ . Binárna relácia  $\preceq$  na množine  $A$  je **reláciou čiastočného usporiadania** práve vtedy, ak pre všetky  $a, b, c \in A$  platí:

$$\begin{aligned} a &\preceq a, \\ a &\preceq b \wedge b \preceq a \Rightarrow a = b, \\ a &\preceq b \wedge b \preceq c \Rightarrow a \preceq c. \end{aligned}$$

Usporiadaná dvojica  $(A; \preceq)$  sa nazýva **čiastočne usporiadaná množina**.

Ak porovnávame čísla (okrem komplexných) podľa veľkosti, tak ľubovoľné dve čísla sa dajú porovnať. Táto vlastnosť pre mnohé čiastočne usporiadané množiny naplatí.

**Definícia 2.3.** čiastočne usporiadaná množina  $(A; \preceq)$ , v ktorej pre všetky  $a, b \in A$  je  $a \preceq b$  alebo  $b \preceq a$  sa nazýva **lineárne usporiadaná**.

**Príklad 2.1.** Nech  $A = \{a, b, c\}$ . Utvoríme potenčnú množinu  $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\},$

$\{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ . Ľahko overíme, že  $(\mathcal{P}(A); \subset)$  je čiastočne usporiadaná množina. Nie je však lineárne usporiadaná, lebo napríklad  $\{c\} \not\subset \{a, b\}$  ani  $\{a, b\} \not\subset \{c\}$ .

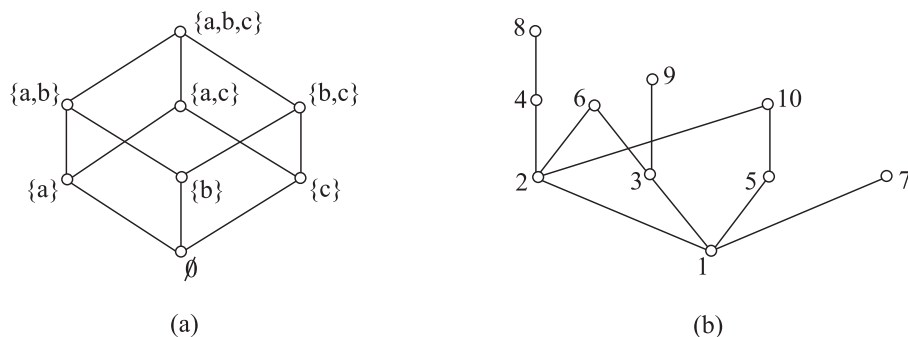
**Príklad 2.2.** Nech  $A$  je neprázdna podmnožina množiny reálnych čísel  $\mathbb{R}$ . Potom  $(A; \leq)$  je čiastočne usporiadaná množina a je aj lineárne usporiadaná.

Konečné čiastočne usporiadané množiny môžeme znázorňovať pomocou grafov podobne ako ktorékoľvek iné binárne relácie. V takých obrázkoch by však bolo veľmi veľa hrán. Skôr ako si vysvetlíme, ktoré hrany netreba zakresľovať, potrebujeme pojem *pokrývajúci prvok*.

**Definícia 2.4.** Nech  $(A; \preceq)$  je čiastočne usporiadaná množina a nech  $a, b \in A$ . Hovoríme, že prvok  $a$  **pokrýva** prvok  $b$ , ak  $a \neq b$  a platí:

1.  $a \preceq b$ ,
2. neexistuje  $x \in A$ ,  $x \neq a$ ,  $x \neq b$  taký, že  $a \preceq x \preceq b$ .

čiastočne usporiadané množiny  $(A; \preceq)$  budeme znázorňovať pomocou tzv. **Hasseho diagramov**. Vrcholy odpovedajúce prvkom množiny  $A$  umiestnime v rovine tak, že ak  $a \preceq b$ , tak vrchol  $a$  umiestnime nižšie ako vrchol  $b$ . Vrcholy  $a, b$  spojíme čiarou (hranou) práve vtedy, ak prvok  $b$  pokrýva prvok  $a$ . Tým si ušetríme kreslenie šípky, pretože orientácia hrany je uvažovaná zdola nahor, a nekreslíme ani hrany medzi dvojicami prvkov, ktorých relačný vzťah vyplýva z tranzitívnosti. Reflexívnosť relácie dovoľuje nekresliť ani slučky pri vrchoch. Hasseho diagram čiastočne usporiadanej množiny z príkladu 2.1 je na obr. 2.1(a).



Obr. 2.1

**Príklad 2.3.** Nech  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .  $(A; |)$  je čiastočne usporiadaná množina, pretože relácia deliteľnosti  $|$  je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Hasseho diagram je na obr. 2.1(b).

**Definícia 2.5.** Nech  $(A; \preceq)$  je čiastočne usporiadaná množina. Prvok  $a \in A$  sa nazýva **najmenší (najväčší)** prvok v  $(A; \preceq)$ , ak pre každý prvok  $x \in A$  platí  $a \preceq x$  ( $x \preceq a$ ).

Prvok  $a \in A$  sa nazýva **minimálny** (**maximálny**) prvok v  $(A; \preceq)$ , ak neexistuje prvok  $x \in A$ ,  $x \neq a$  taký, že  $x \preceq a$  ( $a \preceq x$ ).

Najmenší (najväčší) prvok je zároveň aj minimálnym (maximálnym) prvkom čiastočne usporiadanej množiny, ale naopak to neplatí. Ak čiastočne usporiadaná množina má najmenší, resp. najväčší prvok, je jediným a je zároveň aj jej jediným minimálnym, resp. maximálnym prvkom. Napríklad v  $(A; \preceq)$  z príkladu 2.3 číslo 1 je najmenším prvkom a je zároveň aj jediným minimálnym, maximálnymi prvkami sú čísla 6, 7, 8, 9 a 10 a najväčší prvok neexistuje. V  $(\mathcal{P}(A); \subset)$  z príkladu 2.1 je  $\emptyset$  jediným minimálnym a súčasne aj najmenším prvkom a prvok  $\{1, 2, 3\}$  je jediným maximálnym a zároveň aj najväčším prvkom.

Nech  $M$  je neprázdna podmnožina množiny  $A$ . Ak  $(A; \preceq)$  je čiastočne usporiadaná množina, tak aj  $(M; \preceq)$  je čiastočne usporiadaná množina. Hovoríme, že  $d$  je **najväčší** (**najmenší**, **maximálny**, **minimálny**) prvok množiny  $M \subset A$ , ak je najväčším (najmenším, maximálnym, minimálnym) prvkom čiastočne usporiadanej množiny  $(M; \preceq)$ .

**Definícia 2.6.** Nech  $(A; \preceq)$  je čiastočne usporiadaná množina a  $\emptyset \neq M \subset A$ . Množina

$$h(M) = \{x \in A; (\forall a \in M : a \preceq x)\}$$

je **množina všetkých horných ohraňení** množiny  $M$  a množina

$$d(M) = \{x \in A; (\forall a \in M : x \preceq a)\}$$

je **množina všetkých dolných ohraňení** množiny  $M$ . Najmenší (najväčší) prvok množiny  $h(M)$  ( $d(M)$ ), ak existuje, sa nazýva **supremum** (**infimum**) množiny  $M$  a zapisuje sa **sup**  $M$  (**inf**  $M$ ).

**Príklad 2.4.** Hľadáme supremum a infimum niektorých podmnožín množiny  $A$  z príkladu 2.3. Napríklad:

$$\begin{array}{ll} \sup\{2, 3, 6\} = 6, & \inf\{2, 3, 6\} = 1, \\ \sup\{2, 3, 5, 6\} \text{ neexistuje,} & \inf\{2, 3, 5, 6\} = 1, \\ \sup\{2, 5\} = 10, & \inf\{2, 5\} = 1, \\ \sup\{2, 10\} = 10, & \inf\{2, 10\} = 2. \end{array}$$

## 2.2 Zväzy

Teória zväzov sa využíva v teórii konštrukcie počítačov a pri dokazovaní správnosti programov. Jej výsledky a metódy sa používajú aj pri štúdiu grúp a iných algebraických štruktúr. My sa zameriame na použitie teórie zväzov v Boolovskej algebre.

Nech  $(A; \preceq)$  je čiastočne usporiadaná množina a nech  $x, y \in A$ . Pre  $\inf \{x, y\}$  a  $\sup \{x, y\}$ , ak existujú, zavedieme tieto označenia:

$$\inf \{x, y\} = x \dot{\wedge} y$$

a čítame **priese**k prvkov  $x$  a  $y$ . ďalej

$$\sup \{x, y\} = x \dot{\vee} y$$

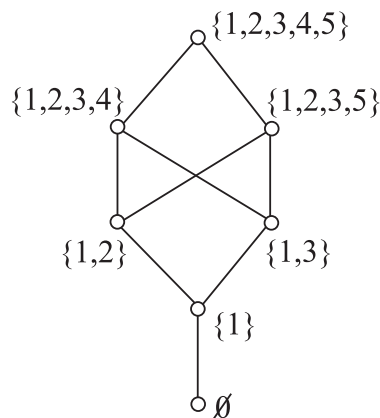
a čítame **spo**jenie prvkov  $x$  a  $y$ .

V príklade 2.4 sme videli, že nie pre každú dvojicu prvkov čiastočne usporiadanej množiny existuje spojenie (nie každá dvojica prvkov má spojenie). Podobne je to aj s priesekom. V lineárne usporiadanej množine majú každé dva prvky prieseok aj spojenie, je nim menší, resp. väčší z nich.

**Definícia 2.7.** *Zväz je čiastočne usporiadaná množina, v ktorej každé dva prvky majú spojenie aj priesek.*

**Príklad 2.5.** Nech  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  a nech  $B = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$  je jej podmnožina. ľahko sa presvedčíme, že  $(B; \subset)$  je čiastočne usporiadaná množina. Jej Hasseho diagram je na obr. 2.2. Nie je to však zväz, lebo prvky  $\{1, 2\}$  a  $\{1, 3\}$  nemajú spojenie (množina ich horných ohraničení nemá najmenší prvok) a prvky  $\{1, 2, 3, 4\}$  a  $\{1, 2, 3, 5\}$  nemajú priesek (množina ich dolných ohraničení nemá najväčší prvok).

čiastočne usporiadaná množina  $(A; \subset)$  z príkladu 2.1 je zväz a v jej Hasseho diagrame na obr. 2.1 sa ľahko presvedčíme, že každá dvojica prvkov má priesek aj spojenie.



Obr. 2.2

**Veta 2.1.** *Nech  $(L; \preceq)$  je zväz. Potom pre ľubovoľné  $x, y, z \in L$  platí:*

|                                                                  |                                                                          |                 |
|------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| $x \dot{\vee} x = x,$                                            | $x \dot{\wedge} x = x,$                                                  | idempotentnosť, |
| $x \dot{\vee} y = y \dot{\vee} x,$                               | $x \dot{\wedge} y = y \dot{\wedge} x,$                                   | komutatívnosť,  |
| $x \dot{\vee} (y \dot{\vee} z) = (x \dot{\vee} y) \dot{\vee} z,$ | $x \dot{\wedge} (y \dot{\wedge} z) = (x \dot{\wedge} y) \dot{\wedge} z,$ | asociatívnosť,  |
| $x \dot{\vee} (y \dot{\wedge} x) = x,$                           | $x \dot{\wedge} (y \dot{\vee} x) = x,$                                   | absorbcia.      |

**Poznámka.** Vo zväze prieseok a spojenie môžeme chápať ako zobrazenia:

$$\dot{\wedge} : A \times A \rightarrow A, \quad \dot{\vee} : A \times A \rightarrow A,$$

čo sú **binárne operácie**. Binárna operácia teda priradí dvom prvkom množiny jeden prvok z tej istej množiny. Podobne **unárna operácia** priradí len jednému

prvku jeden prvok z tej istej množiny. Rovnocennou definíciou zväzu je aj nasledujúca:

**Definícia 2.8.** *Zväz je algebraický systém  $(L; \dot{\vee}, \dot{\wedge})$ , kde  $L \neq \emptyset$  a pre operácie prieseku  $\dot{\wedge}$  a spojenia  $\dot{\vee}$  platia vlastnosti: idempotentnosť, komutatívnosť, asociatívnosť a absorbcia.*

**Príklad 2.6.** Na zväz  $(A; \subset)$  z príkladu 2.5, ktorého Hasseho diagram je na obr. 2.1, sa môžeme pozeráť aj ako na množinu s definovanými binárnymi operáciami zjednotenia a prieniku. čitateľ si ľahko preverí, že algebraický systém  $(\mathcal{P}(A); \cup, \cap)$  vyhovuje definícii 2.8.

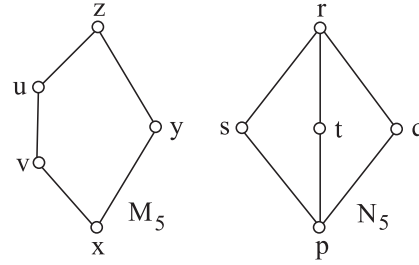
Algebraický systém  $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$  zväzom nie je, lebo hneď prvá vlastnosť – idempotentnosť neplatí.

**Definícia 2.9.** *Zväz  $(L; \dot{\vee}, \dot{\wedge})$  sa nazýva distributívny, ak pre všetky  $x, y, z \in L$  platí:*

$$\begin{aligned} x \dot{\wedge} (y \dot{\vee} z) &= (x \dot{\wedge} y) \dot{\vee} (x \dot{\wedge} z), \\ x \dot{\vee} (y \dot{\wedge} z) &= (x \dot{\vee} y) \dot{\wedge} (x \dot{\vee} z). \end{aligned}$$

**Príklad 2.7.** Na obr. 2.3 sú Hasseho diagramy zväzov  $N_5$  a  $M_5$  (tieto označenia sú zaužívané v literatúre). Nie sú distributívne, lebo v každom sa dá nájsť trojica prvkov, pre ktorú neplatí aspoň jedna z rovností v definícii 2.9. Napr. v  $N_5$  je  $u \dot{\wedge} (v \dot{\vee} y) = u \dot{\wedge} z = u$ , ale  $(u \dot{\wedge} v) \dot{\vee} (u \dot{\wedge} y) = v \dot{\vee} x = v$ .

Podobne v  $M_5$  je  $s \dot{\wedge} (t \dot{\vee} q) = s \dot{\wedge} r = s$ , ale  $(s \dot{\wedge} t) \dot{\vee} (s \dot{\wedge} q) = p \dot{\vee} p = p$ .



Obr. 2.3

V každom konečnom zväze existuje jediný najväčší prvok  $I$  (**horné univerzálne ohraničenie**) a jediný najmenší prvok  $0$  (**dolné univerzálne ohraničenie**). Tieto prvky môžeme označiť aj v symbolickom zápise zväzu takto:  $(L; \dot{\vee}, \dot{\wedge}, 0, I)$ .

**Definícia 2.10.** *Nech  $(L; \dot{\vee}, \dot{\wedge}, 0, I)$  je zväz. Prvok  $x' \in L$  nazývame **komplementom** prvku  $x \in L$  práve vtedy, ak*

$$x \dot{\wedge} x' = 0 \quad \text{a} \quad x \dot{\vee} x' = I.$$

**Príklad 2.8.** Pre prvky zväzu z príkladu 2.6, ktorého Hasseho diagram je na obr. 2.1(a), platí  $0 = \emptyset$  a  $I = \{a, b, c\}$ . ďalej je  $0' = I$ ,  $I' = 0$ ,  $\{a\}' = \{b, c\}$ ,  $\{b\}' = \{a, c\}$ ,  $\{c\}' = \{a, b\}$ ,  $\{a, b\}' = \{c\}$ ,  $\{a, c\}' = \{b\}$ ,  $\{b, c\}' = \{a\}$ . Ku každému prvku teda existuje práve jeden komplement.

Pre zväz  $M_5$  na obr. 2.3 platí  $0 = p$  a  $I = r$ . ďalej  $0' = I$ ,  $I' = 0$ ,  $s' = t$ ,  $s' = q$ ,  $t' = s$ ,  $t' = q$ ,  $q' = s$ ,  $q' = t$ ,

teda prvky  $s, t, q$  majú po dva komplementy. Existujú zväzy, v ktorých niektoré prvky majú viac komplementov.

**Definícia 2.11.** Zväz  $(L; \dot{\vee}, \dot{\wedge}, 0, I)$  sa nazýva **komplementárny práve vtedy**, ak každý jeho prvok má komplement. Distributívny a komplementárny zväz nazývame **boolovským zväzom**.

**Veta 2.2.** V boolovskom zväze  $(L; \dot{\vee}, \dot{\wedge}, 0, I)$  má každý prvok práve jeden komplement.

**Poznámka.** Dá sa ukázať, že ak je zväz konečný a každý jeho prvok má práve jeden komplement, tak je aj distributívny. Už sme si ukázali, že  $(\mathcal{P}(A); \subset)$ , kde  $A = \{a, b, c\}$ , je zväz, že je distributívny aj komplementárny, teda boolovský. Platí aj to pre každú inú konečnú množinu, t.j keď  $|A| = n$ . Taký zväz má  $2^n$  prvkov a môžeme ho zapisovať aj  $(\mathcal{P}(A); \cup, \cap)$ . Dá sa tiež ukázať, že každý konečný boolovský zväz má  $2^n$  prvkov pre nejaké nezáporné celé číslo  $n$ , a že jeho Hasseho diagram je zhodný s Hasseho diagramom zväzu  $(\mathcal{P}(A); \cup, \cap)$  pre to isté  $n$ .

Komplement v boolovskom zväze  $(L; \dot{\vee}, \dot{\wedge}, 0, I)$  môžeme chápať ako unárnu operáciu z množiny  $L$  do množiny  $L$ . Potom sa na boolovský zväz môžeme pozeráť ako na algebraický systém  $(L; \dot{\vee}, \dot{\wedge}, ', 0, I)$ , kde  $L \neq \emptyset$ , operácie  $\dot{\vee}, \dot{\wedge}$  sú binárne operácie a  $'$  je unárna operácia na  $L$ . Takému vyjadreniu zväzu budeme hovoriť **boolovská algebra**. Okrem už uvedených vlastností idempotentnosť, komutatívnosť, asociatívnosť, absorbcia, distributívnosť a existencia komplementu ku každému prvku platí v boolovskej algebre aj mnoho ďalších vlastností. Uvedieme len najhlavnejšie z nich, ktoré budeme neskôr používať pri úprave boolovských funkcií:

- |                                                           |                                                              |
|-----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| (1) $x \dot{\vee} 0 = x$ ,                                | (2) $x \dot{\wedge} I = x$ ,                                 |
| (3) $x \dot{\vee} x' = I$ ,                               | (4) $x \dot{\wedge} x' = 0$ ,                                |
| (5) $x \dot{\wedge} 0 = 0$ ,                              | (6) $x \dot{\vee} I = I$ ,                                   |
| (7) $(x \dot{\vee} y)' = x' \dot{\wedge} y'$ ,            | (8) $(x \dot{\wedge} y)' = x' \dot{\vee} y'$ ,               |
| (9) $x \dot{\vee} (x' \dot{\wedge} y) = x \dot{\vee} y$ , | (10) $x \dot{\wedge} (x' \dot{\vee} y) = x \dot{\wedge} y$ . |

**Poznámka.** Vlastnosti (7) a (8) sú známe pod názvom de Morganové pravidlá. Doporučujeme čitateľovi všimnúť si podobnosť množinových vlastností z vety 1.1 a vlastností boolovskej algebry.

**Príklad 2.9.** Majme dvojprvkovú množinu  $D = \{0, 1\}$ . Nech pre prvky množiny  $D$  sú definované binárne operácie priesek a spojenie a unárna operácia  $'$  pomocou tabuliek:

|                |   |   |
|----------------|---|---|
| $\dot{\wedge}$ | 0 | 1 |
| 0              | 0 | 0 |
| 1              | 0 | 1 |

|              |   |   |
|--------------|---|---|
| $\dot{\vee}$ | 0 | 1 |
| 0            | 0 | 1 |
| 1            | 1 | 1 |

|   |     |
|---|-----|
|   | $'$ |
| 0 | 1   |
| 1 | 0   |

V tomto prípade dolné univerzálne ohraničenie je 0 a horné univerzálne ohraničenie je 1 (musíme si uvedomiť, že nie sú to čísla 0 a 1). Bez väčších ťažkostí si môžeme

overiť, že algebraický systém  $(D; \dot{\vee}, \dot{\wedge}, ', 0, 1)$  je boolovská algebra.

## 2.3 Boolovské funkcie

V tejto časti poukážeme na aplikácie boolovských algebier v elektrotechnike a v logike.

**Definícia 2.12** *Nech  $(D; \dot{\vee}, \dot{\wedge}, ', 0, 1)$  je boolovská algebra, kde  $D = \{0, 1\}$ . Zobrazenie  $f : D^n \rightarrow D$  sa nazýva **boolovská funkcia** s  $n$  premennými. Zapisujeme ju*

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

kde  $y, x_i \in D$  pre všetky  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Z uvedeného vyplýva, že boolovská funkcia s  $n$  premennými každej usporiadanej  $n$ -tici núl a jedničiek z množiny  $D^n$  priradí hodnotu 0 alebo 1.

**Veta 2.3.** *Existuje práve  $2^{2^n}$  rôznych boolovských funkcií s  $n$  premennými.*

**Príklad 2.10.** Z vety 2.3 vyplýva, že existuje práve 16 rôznych boolovských funkcií s 2 premennými. Každé zo štyroch usporiadaných dvojíc  $(x_1, x_2)$  funkcia  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 16$ , priradí hodnotu 0 alebo 1. Všetkých 16 funkcií je vypísaných v nasledujúcej tabuľke.

| $(x_1, x_2)$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ | $f_8$ | $f_9$ | $f_{10}$ | $f_{11}$ | $f_{12}$ | $f_{13}$ | $f_{14}$ | $f_{15}$ | $f_{16}$ |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| (0,0)        | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 1        | 1        | 1        | 0        | 1        | 0        | 1        |
| (0,1)        | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0        | 1        | 1        | 0        | 1        | 1        | 0        |
| * (1,0)      | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1        | 0        | 1        | 0        | 1        | 1        | 0        |
| (1,1)        | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1        | 1        | 0        | 0        | 1        | 0        | 1        |

**Definícia 2.13.** *Nech  $x_i^*$  označuje hodnotu  $x_i \in D$  alebo hodnotu jeho komplementu  $x_i'$  pre všetky  $i = 1, 2, \dots, n$ . Boolovskú funkciu*

$$k(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^* \dot{\wedge} x_2^* \dot{\wedge} \dots \dot{\wedge} x_n^*$$

*nazývame **elementárna konjunkcia** a boolovskú funkciu*

$$d(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^* \dot{\vee} x_2^* \dot{\vee} \dots \dot{\vee} x_n^*$$

*nazývame **elementárna disjunkcia**.*

*Nech  $k_1, k_2, \dots, k_j$ , kde  $0 \leq j \leq 2^n$ , sú rôzne elementárne konjunkcie. Funkcia*

$$f = 0 \dot{\vee} k_1 \dot{\vee} k_2 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} k_j$$

*je boolovská funkcia s  $n$  premennými v **normálnom disjunktívnom tvare (NDT)**.*

*Nech  $d_1, d_2, \dots, d_r$ , kde  $0 \leq r \leq 2^n$ , sú rôzne elementárne disjunkcie. Funkcia*

$$f = 1 \dot{\wedge} d_1 \dot{\wedge} d_2 \dot{\wedge} \dots \dot{\wedge} d_r$$

je boolovská funkcia v **normálnom konjunktívnom tvare (NKT)**.

Vzniká prirodzene otázka, či sa dá každá boolovská funkcia napísať v niektorom z týchto tvarov.

**Veta 2.4.** Každá boolovská funkcia sa dá zapísať v normálnom disjunktívnom tvare aj v normálnom konjunktívnom tvare.

**Príklad 2.11.** Upravme na normálny disjunktívny tvar boolovskú funkciu  $f = (x'_1 \wedge x'_3) \vee (x'_2 \wedge x'_3)$ . Využijeme vlastnosti boolovskej algebry a robíme postupné úpravy tak, aby sme neporušili rovnosť.

$$\begin{aligned} f &= (x'_1 \wedge x'_3) \vee (x'_2 \wedge x'_3) = [(x'_1 \wedge x'_3) \wedge (x'_2 \vee x_2)] \vee [(x'_2 \wedge x'_3) \wedge (x'_1 \vee x_1)] = \\ &= (x'_1 \wedge x'_2 \wedge x'_3) \vee (x'_1 \wedge x_2 \wedge x'_3) \vee (x'_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3). \end{aligned}$$

Využili sme, že  $(x'_1 \vee x_1) = (x'_2 \vee x_2) = 1$  podľa vlastnosti (3) predchádzajúceho paragrafu. Použili sme aj vlastnosť (6), z ktorej sme dostali  $(x'_1 \wedge x'_3) \wedge (x'_2 \vee x_2) = (x'_1 \wedge x'_3)$  a  $(x'_2 \wedge x'_3) \wedge (x'_1 \vee x_1) = (x'_2 \wedge x'_3)$ . Okrem toho sme použili vlastnosť distributívnosť v opačnom poradí, tzv. vyberanie pred zátvorku ako aj komutatívnosť a asociatívnosť.

Uvedieme aj iný spôsob ako boolovskú funkciu previesť na normálny disjunktívny, resp. konjunktívny tvar. Pre porovnanie pracujme s tou istou funkciou  $f$  ako v predchádzajúcom príklade. Vyrobit si tabuľku, v ktorej v prvých troch stĺpcoch sú všetky trojice hodnôt premenných  $x_1, x_2$  a  $x_3$ . V stĺpci  $f$  budú hodnoty boolovskej funkcie pre príslušné usporiadané trojice núl a jedničiek. V stĺpci  $k_i$  vytvoríme v každom riadku, v ktorom hodnota funkcie je 1, elementárnu konjunkciu tak, aby jej hodnota pre príslušnú trojicu premenných bola tiež 1. Podobne v stĺpci  $d_i$  v každom riadku s hodnotou funkcie rovnou 0 vytvoríme elementárnu disjunkciu dávajúcu hodnotu 0 pre príslušnú trojicu premenných.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f$ | $k_i$                          | $d_i$                     |
|-------|-------|-------|-----|--------------------------------|---------------------------|
| 0     | 0     | 0     | 1   | $x'_1 \wedge x'_2 \wedge x'_3$ |                           |
| 0     | 0     | 1     | 0   |                                | $x_1 \vee x_2 \vee x'_3$  |
| 0     | 1     | 0     | 1   | $x'_1 \wedge x_2 \wedge x'_3$  |                           |
| 0     | 1     | 1     | 1   | $x'_1 \wedge x_2 \wedge x_3$   |                           |
| 1     | 0     | 0     | 0   |                                | $x'_1 \vee x_2 \vee x_3$  |
| 1     | 0     | 1     | 0   |                                | $x'_1 \vee x_2 \vee x'_3$ |
| 1     | 1     | 0     | 0   |                                | $x'_1 \vee x'_2 \vee x_3$ |
| 1     | 1     | 1     | 1   | $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$    |                           |

Ak vytvoríme disjunkciu elementárnych konjunkcií zo stĺpca  $k_i$  a konjunkciu elementárnych disjunkcií zo stĺpca  $d_i$ , tak dostaneme:

$$\begin{aligned} f &= (x'_1 \wedge x'_2 \wedge x'_3) \vee (x'_1 \wedge x_2 \wedge x'_3) \vee (x'_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3), \\ f &= (x_1 \vee x_2 \vee x'_3) \wedge (x'_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x'_1 \vee x_2 \vee x'_3) \wedge (x'_1 \vee x'_2 \vee x_3). \end{aligned}$$

**Poznámka.** V definícii 2.13 na začiatku NKT je jednička a na začiatku NDT je nula. Tieto konštanty vo väčšine prípadov nemusíme písať, ale dôležitú úlohu zohrávajú, ak sa jedná o funkciu, ktorá pre všetky hodnoty premenných nadobúda hodnotu 1, resp. 0.

Vo výrokovej logike pod *výrokom* rozumieme ľubovoľné tvrdenie, o ktorom má zmysel hovoriť, či je pravdivé alebo nepravdivé. Každému výroku môžeme priradiť jeho pravdivostnú hodnotu t.j. pravda (označujeme symbolom 1), resp. nepravda (používame symbol 0). Rozoznávame *elementárne výroky*, alebo výroky *zložené* z elementárnych pomocou logických operácií. Zloženým výrokom hovoríme aj *výrokové formuly*. Základnými logickými operáciami sú: *negácia*  $'$ , konjunkcia  $\wedge$ , disjunkcia  $\vee$ , implikácia  $\Rightarrow$  a *ekvivalencia*  $\Leftrightarrow$ . Čitateľ sa s nimi už určite stretol na strednej škole, preto ich nebudeme bližšie popisovať.

Každá formula výrokovej logiky sa dá zapísať (realizovať) pomocou boolovskej funkcie. Je tým daná jednoznačná korešpondencia medzi  $\wedge$  a  $\vee$  (*a* a *alebo*) na jednej strane a  $\dot{\wedge}$  a  $\dot{\vee}$  na strane druhej. Preto v ďalšom texte pri boolovských funkciách nemusíme používať symboly prieseku a spojenia  $\dot{\wedge}$  a  $\dot{\vee}$  „zdedené“ zo zväzov, ale budeme písať symboly logickej konjunkcie a disjunkcie, t.j.  $\wedge$  a  $\vee$ . Samozrejme v zápise výrokovej formuly pomocou boolovskej funkcie sa nevyskytuje implikácia ani ekvivalencia.

**Príklad 2.12.** Zapíšme pomocou boolovskej funkcie výrovkovú formulu

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)].$$

Zostrojíme si pravdivostnú tabuľku pre túto výrovkovú formulu a stĺpec s pravdivostnými hodnotami celej formuly je zároveň stĺpcom hodnôt boolovskej funkcie pre príslušné hodnoty premenných (pravdivostných hodnôt elementárnych výrokov)  $p$  a  $q$ . Ďalej postupujeme podľa už opísaného postupu pri zapisovaní boolovskej funkcie v NDT alebo NKT. Takto získané zápisy sa často dajú pomocou vlastností boolovskej algebry značne zjednodušiť. Uvedený postup ukazuje nasledujúca tabuľka a potom zápis získaných funkcií v NDT a NKT. Je vidieť, že sa jedná o tzv. *tautológiu*, t.j. vždy pravdivý výrok.

| $p$ | $q$ | $p \Leftrightarrow q$ | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow p$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ | $f$ |
|-----|-----|-----------------------|-------------------|-------------------|----------------------------------------------|-----|
| 1   | 1   | 1                     | 1                 | 1                 | 1                                            | 1   |
| 1   | 0   | 0                     | 0                 | 1                 | 0                                            | 1   |
| 0   | 1   | 0                     | 1                 | 0                 | 0                                            | 1   |
| 0   | 0   | 1                     | 1                 | 1                 | 1                                            | 1   |

Potom v normálnom disjunktívnom tvare je

$$f = (p \wedge q) \vee (p \wedge q') \vee (p' \wedge q) \vee (p' \wedge q')$$

a v normálnom konjunktívnom tvare je

$$f = 1,$$

pretože počet príslušných elementárnych disjunkcií je nula.

Boolovskú algebru možno s výhodou využiť pri navrhovaní kontaktných sietí. Kontaktné siete v praxi využívame pri kontrole práce nejakých zložitých sústav, pričom poruchu sústavy obyčajne signalizuje rozsvietená signalizačná žiarovka. Ukážeme, ako možno navrhnúť kontaktnú sieť na kontrolu takeého systému.

**Príklad 2.13.** Pre sústavu troch strojov navrhnite kontaktnú sieť tak, aby signalizovala, že nastala niektorá z uvedených porúch:

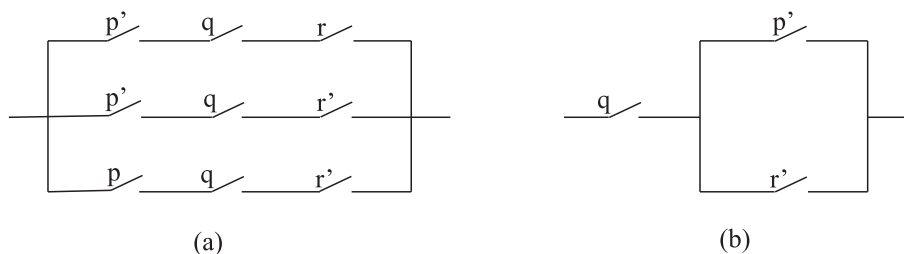
- a) prvý stroj nepracuje, druhý pracuje,
- b) prvý a druhý stroj pracujú, ale tretí nepracuje.

**Riešenie.** Stačia nám tri základné kontakty, pričom sa dohodneme, že kontaktom  $p$  prechádza prúd práve vtedy, keď pracuje prvý stroj, kontaktom  $q$  práve vtedy, keď pracuje druhý stroj a kontaktom  $r$  práve vtedy, keď pracuje tretí stroj. Celou sieťou bude prechádzať prúd práve vtedy, keď nastane niektorá z uvedených porúch. To znamená, že v našom prípade bude sieťou prechádzať prúd práve vtedy, ak nastane niektorá z nasledujúcich možností:

1. prvý stroj nepracuje, druhý pracuje a tretí pracuje,
2. prvý stroj nepracuje, druhý pracuje a tretí nepracuje,
3. prvý a druhý stroj pracujú, tretí nepracuje.

Túto situáciu môžeme realizovať napríklad kontaktnou sieťou na obr. 2.4(a) a sieť môžeme „boolovsky“ charakterizovať pomocou funkcie

$$f = (p' \wedge q \wedge r) \vee (p' \wedge q \wedge r') \vee (p \wedge q \wedge r')$$



Obr. 2.4

Mohli sme si pomôcť aj tabuľkou na výrobu elementárnych konjunkcií a elementárnych disjunkcií. Funkcia  $f$  je teraz zapísaná v NDT. Kontaktná sieť na obr. 2.4(a) je zbytočne zložitá. Ak využijeme vlastnosti boolovskej algebry, dá sa funkcia značne zjednodušiť:

$$\begin{aligned} f &= (p' \wedge q \wedge r) \vee (p' \wedge q \wedge r') \vee (p \wedge q \wedge r') = \\ &= [(p' \wedge q) \wedge (r \vee r')] \vee (p \wedge q \wedge r') = \\ &= (p' \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge r') = q \wedge [p' \vee (p \wedge r')] = \end{aligned}$$

$$q \wedge [(p' \vee p) \wedge (p' \vee r')] = q \wedge (q' \vee r').$$

Tomuto výrazu zodpovedá kontaktná sieť na obr. 2.4(b), ktorá je podstatne jednoduchšia (je dokonca minimálna).

## 2.4 Úlohy

- 2.1. Ukážte, že relácia rovnosti na množine je súčasne čiastočným usporiadaním aj ekvivalenciou. Je to jediná relácia, pre ktorú to platí.
- 2.2. Ukážte, že každá konečná lineárne usporiadaná množina má súčasne najmenší aj najväčší prvok.
- 2.3. Nech  $F$  je množina všetkých reálnych funkcií  $f_i$  jednej reálnej premennej, ktorých definičný obor je  $D \subset \mathbb{R}$ . Reláciu  $\mathcal{R}$  definujme takto: Pre všetky  $f_1, f_2 \in F$  je  $f_1 \mathcal{R} f_2$  práve vtedy, ak pre všetky  $x \in D$  je  $f_1(x) \leq f_2(x)$ . Ukážte, že  $(F; \mathcal{R})$  je čiastočne usporiadaná množina.
- 2.4. Nakreslite Hasseho diagram čiastočne usporiadanej množiny  $(M; |)$  (ak to je čiastočne usporiadaná množina), kde  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12\}$  a  $|$  je relácia deliteľnosti celých čísel.
- 2.5. Rozhodnite, či  $(A; \mathcal{R})$  je čiastočne usporiadaná množina, ak  $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  a relácia  $\mathcal{R}$  je definovaná:
  - a)  $(a, b) \mathcal{R} (c, d) \Leftrightarrow a + b \leq c \wedge b \leq d$  pre všetky  $(a, b), (c, d) \in A$ ,
  - b)  $(a, b) \mathcal{R} (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$  pre všetky  $(a, b), (c, d) \in A$ .
- 2.6. Ukážte, že každá lineárne usporiadaná množina je zväzom.
- 2.7. Presvedčte sa, že  $(S; |)$ , kde  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30, 60\}$  a  $|$  je relácia deliteľnosti celých čísel, je zväz. Nakreslite jeho Hasseho diagram. Zistite, či tento zväz je distributívny a či každý jeho prvok má komplement.
- 2.8. Ukážte, že v každom distributívnom zväze pre ľubovoľné tri prvky  $x, y, z$  platí rovnosť

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x).$$

- 2.9. Nech  $x, y$  sú ľubovoľné prvky boolovskej algebry. Dokážte, že  $x = y$  práve vtedy, ak  $(x \wedge y') \vee (x' \wedge y) = 0$ .
- 2.10. Upravte boolovskú funkciu  $f = x_1 \wedge [(x_2' \wedge x_4) \vee x_3']$  na normálny konjunktívny tvar aj na normálny disjunktívny tvar.

2.11. Zistite, či boolovské funkcie

$$f = [(x \wedge y) \vee (x \vee z)]' \vee x \quad \text{a} \quad g = [x' \wedge (z \vee (y' \wedge z))] \vee x$$

sa rovnajú.

2.12. Svetlo v chodbe je ovládané z troch vypínačov a v každom momente môže byť zapnuté aj vypnuté ktorýmkoľvek z nich. Navrhnite kontaktnú sieť pre takéto zapojenie.

2.13. Výrobná linka pozostáva z troch strojov. Navrhnite minimálnu kontaktnú sieť, ktorá signalizuje, že nastal niektorý z uvedených stavov:

- a) prvý stroj pracuje a z ostatných jeden pracuje a jeden nie,
- b) prvý stroj nepracuje a z ostatných jeden pracuje a jeden nie.

2.14. Zapište pomocou boolovskej funkcie v normálnom konjunktívnom aj v normálnom disjunktívnom tvare výrokovú formulu

$$(((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow A$$

a minimalizujte získanú boolovskú funkciu.

# Kapitola 3

## Grupy, telesá a polia

### 3.1 Grupy

Teória grúp patrí medzi mladé matematické disciplíny. Jej začiatky siahajú do prvej polovice minulého storočia, keď v roku 1826 nórskeho matematik Henrik Abel podal dôkaz neriešiteľnosti algebraickej rovnice 5. stupňa pomocou odmocnín. Grupy našli široké uplatnenie v matematických i nematematických disciplínach a ich význam s rozvojom informatiky rastie.

Vieme, že usporiadanej dvojici celých čísel  $(a, b)$  môžeme priradiť celé číslo  $c = a + b$ . Sčítavanie je vlastne zobrazenie  $f$ , v tomto prípade  $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , kde  $f(a, b) = a + b$ . Zobrazenie takého typu sa nazýva **binárnou operáciou**.

**Príklad 3.1.** Riešme rovnicu  $3x = 4$ . Obyčajný postup si rozpíšeme podrobnejšie (pozri pravý stĺpec):

Pritom využívame, že  $\frac{1}{3}$  je vzhľadom na násobenie *inverzný* prvok k číslu 3, pri zmene poradia zátvoriek využívame *asociatívnosť* násobenia, potom to, že číslo 1 je vzhľadom na násobenie *neutrálny* prvok a v neposlednom rade to, že súčin dvoch reálnych čísel je opäť reálne číslo, t.j. *uzavretosť* množiny reálnych čísel vzhľadom na operáciu násobenia. Práve vymenované štyri vlastnosti nám umožňujú zaviesť pojem grupy.

$$\begin{aligned} 3x &= 4 \quad / \cdot \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}(3x) &= \frac{1}{3} \cdot 4 \\ \left(\frac{1}{3} \cdot 3\right)x &= \frac{4}{3} \\ 1 \cdot x &= \frac{4}{3} \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

**Definícia 3.1.** *Nech  $G \neq \emptyset$  je množina. Grupa je algebraický systém  $(G; *)$ , pre ktorý platí:*

1. *Pre všetky  $x, y \in G$  aj  $x * y \in G$ .*
2. *Pre všetky  $x, y, z \in G$  je  $x * (y * z) = (x * y) * z$ .*
3. *V  $G$  existuje prvok  $e$  taký, že pre každé  $x \in G$  je  $x * e = e * x = x$ .*

4. Ku každému  $x \in G$  existuje taký prvok  $x' \in G$ , že  $x * x' = x' * x = e$ . Ak  $G$  je konečná množina a  $|G| = n$ , tak číslo  $n$  je **rád grupy**  $(G; *)$ .

**Poznámka.** Vlastnosť 1. z definície vyjadruje **uzavretosť** množiny vzhľadom na operáciu  $*$ . Vlastnosť 2. poznáme pod názvom **asociatívnosť**. Prvok  $e$  z vlastnosti 3. sa nazýva **neutrálny prvok** vzhľadom na operáciu  $*$  a prvok  $x'$  z vlastnosti 4. je **inverzný prvok** k prvku  $x$  vzhľadom na operáciu  $*$ .

Ak pre  $(G; *)$  platí vlastnosť 1. (uzavretosť) a vlastnosť 2. (asociatívnosť), algebraický systém  $(G; *)$  nazývame **pologrupa**.

**Veta 3.1.** V každej grupe  $(G; *)$  existuje práve jeden neutrálny prvok  $e$  a ku každému prvku  $x$  existuje práve jeden inverzný prvok  $x'$ .

**Definícia 3.2.** Grupa  $(G; *)$  sa nazýva **komutatívna** alebo **abelovská**, ak pre všetky  $x, y \in G$  platí

$$x * y = y * x.$$

**Príklad 3.2.** Algebraický systém  $(\mathbb{N}; -)$  nie je grupa, pretože existujú prirodzené čísla  $m, n$  také, že  $m - n$  je záporné číslo, a teda neplatí uzavretosť.

Pre algebraický systém  $(\mathcal{P}(A); \cap)$  platí, že pre každé  $A_i, A_j \in \mathcal{P}(A)$  aj  $A_i \cap A_j \in \mathcal{P}(A)$ , platí asociatívnosť prieniku množín, a tiež existuje neutrálny prvok  $e = A$  taký, že pre každú množinu  $A_i \in \mathcal{P}(A)$ , teda  $A_i \subset A$ , je  $A_i \cap e = e \cap A_i = A_i$ . Nie je to však grupa, lebo v  $\mathcal{P}(A)$  žiadna vlastná podmnožina množiny  $A$  nemá inverzný prvok.

ľahko sa preverí, že  $(\mathbb{Z}; +)$  je grupa a tiež  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$  je grupa.

Algebraický systém  $(\mathbb{R}; \cdot)$  grupou nie je, lebo k číslu 0 neexistuje inverzný prvok.

Vlastnosti grupy sú zovšeobecnením sčítavania a násobenia reálnych čísel. Ak sa jedná o grupu s binárnou operáciou sčítavania  $(G; +)$ , hovoríme o **aditívnej** grupe. Podobne **multiplikatívna** grupa je grupa  $(G; \cdot)$  s operáciou násobenia.

**Veta 3.2.** Nech  $(G; *)$  je grupa a nech  $a, b \in G$ . Potom rovnica

$$a * x = b \quad (x * a = b)$$

má práve jedno riešenie

$$x = a' * b \quad (x = b * a').$$

Z vety 3.2 vyplýva **pravidlo o krátení** zľava (sprava): Pre všetky  $a, x_1, x_2 \in G$  platí:

$$a * x_1 = a * x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$(x_1 * a = x_2 * a \Leftrightarrow x_1 = x_2).$$

V abelovskej grupe teda rovnice  $x_1 * a = b$  a  $a * x_2 = b$  majú rovnaké riešenie

$$x_1 = x_2 = b * a'.$$

Táto veta nám vraví kedy rovnice toho typu majú pre operácie sčítavania a násobenia čísel jednoznačné riešenie a kedy nie. Väčšinou riešime takéto rovnice už na základných a stredných školách a ani si neuvedomujeme, že pracujeme napr. na grupách  $(\mathbb{Z}; +)$ ,  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$  a podobne. O číselných množinách a operáciách sčítavania a násobenia čísel vieme veľa. Veľkou prednosťou grúp je, že vlastností grúp „rovnakého typu“ sa zhodujú bez ohľadu na to, o akú množinu a akú binárnu operáciu sa jedná. Potom stačí ukázať, že sa jedná o určitý typ grupy a môžeme využívať všetky vlastnosti dokázané na inej grupe rovnakého typu. čo rozumieme pod grupami rovnakého typu nám vystihuje pojem *izomorfizmus*.

**Definícia 3.3.** Dve grupy  $(A; \square)$  a  $(B; \triangle)$  sú **izomorfné** práve vtedy, ak existuje bijektívne zobrazenie  $\varphi : A \rightarrow B$  také, že pre všetky  $a_1, a_2 \in A$  je

$$\varphi(a_1 \square a_2) = \varphi(a_1) \triangle \varphi(a_2).$$

**Príklad 3.3.** Na množine zvyškových tried modulo  $m$  (pozri paragraf 1.3) si definujeme operácie  $\oplus$  a  $\odot$  takto:

$$\bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a + b} \quad \text{a} \quad \bar{a} \odot \bar{b} = \overline{a \cdot b}.$$

Nech  $K = \{1, -1, i, -i\}$  je podmnožina komplexných čísel. Zistite, či algebraické systémy  $(\mathbb{Z}_4; \oplus)$  a  $(K; \cdot)$  sú izomorfné grupy.

**Riešenie.** Všetky výsledky binárnych operácií  $\oplus$  a  $\cdot$  na uvedených množinách môžeme zapísať do **Cayleyho** tabuliek:

| $\oplus$  | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\cdot$ | 1    | -1   | $i$  | $-i$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|------|------|------|------|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | 1       | 1    | -1   | $i$  | $-i$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | -1      | -1   | 1    | $-i$ | $i$  |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $i$     | $i$  | $-i$ | -1   | 1    |
| $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $-i$    | $-i$ | $i$  | 1    | -1   |

Obe množiny sú uzavreté vzhľadom na operáciu, lebo v poli tabuľky sú iba prvky príslušnej množiny. Neutrálnym prvkom v prvom prípade je  $\bar{0}$  a v druhom 1. V tabuľke to vidíme tak, že sa v riadku (stĺpci) odpovedajúcemu neutrálnemu prvku zopakuje riadok (stĺpec) zo záhlavia. Inverzný prvok k nejakému prvku nájdeme tak, že v riadku, ktorý tomu prvku odpovedá, nájdeme neutrálny prvok a nad ním v záhlaví tabuľky je inverzný. Platí to aj pre stĺpce. V prvom prípade je  $\bar{0}' = \bar{0}$ ,  $\bar{1}' = \bar{3}$ ,  $\bar{2}' = \bar{2}$  a  $\bar{3}' = \bar{1}$ , v druhom  $1' = 1$ ,  $-1' = -1$ ,  $i' = -i$  a  $-i' = i$ . Iba asociatívnosť sa nedá zistiť priamo z tabuľky. Pre  $(K; \cdot)$  asociatívnosť platí,

pretože platí pre násobenie ľubovoľných troch komplexných čísel. Pri sčítavaní zvyškových tried modulo  $m$  pre ľubovoľné  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_m$  je

$$\bar{x} \oplus (\bar{y} \oplus \bar{z}) = \bar{x} \oplus \overline{(y + z)} = \overline{x + (y + z)}$$

$$(\bar{x} \oplus \bar{y}) \oplus \bar{z} = \overline{x + y} \oplus \bar{z} = \overline{(x + y) + z}.$$

Keďže  $x + (y + z) = (x + y) + z$ , asociatívnosť sčítavania v  $\mathbb{Z}_m$  platí, a teda platí aj v  $\mathbb{Z}_4$ . (Podobne sa ukáže asociatívnosť násobenia  $\odot$  zvyškových tried.)

Algebraické systémy  $(\mathbb{Z}_4; \oplus)$  a  $(K; \cdot)$  sú teda grupy. Uvažujme teraz bijektívne zobrazenie  $\varphi : \mathbb{Z}_4 \rightarrow K$  definované

$$\varphi = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}.$$

Dá sa bez ťažkostí preveriť, že pre každú dvojicu prvkov  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_4$  je

$$\varphi(\bar{x} \oplus \bar{y}) = \varphi(\bar{x}) \cdot \varphi(\bar{y}).$$

Ide teda o izomorfné grupy.

**Poznámka.** Ak máme dve izomorfné grupy s malým počtom prvkov, potom sa ich Cayleyho tabuľky dajú zostrojiť tak, že po položení na seba sa prekrývajú presne podľa zvoleného izomorfného zobrazenia  $\varphi$ . Doporučujeme čitateľovi zmeniť poradie prvkov v záhlaví jednej tabuľky tak aby sa prekrývali  $\bar{0}$  s 1,  $\bar{1}$  s  $i$ ,  $\bar{2}$  s  $-1$  a  $\bar{3}$  s  $-i$ .

## 3.2 Cyklické grupy

Grupy uvedené v predchádzajúcom príklade majú aj Ďalšiu vlastnosť, sú *cyklické*. Pred definovaním pojmu cyklickosť potrebujeme pojem *mocniny* prvku.

**Definícia 3.4.** *Nech  $(G; *)$  je grupa a nech  $n \in \mathbb{Z}$ . Potom **n-tou mocninou** prvku  $x \in G$  nazývame taký prvok  $x^n \in G$ , pre ktorý platí:*

$$\begin{aligned} x^n &= \overbrace{x * x * \dots * x}^n, & \text{ak } n > 0, \\ x^n &= 1, & \text{ak } n = 0, \\ x^n &= (x')^{-n}, & \text{ak } n < 0. \end{aligned}$$

**Definícia 3.5.** *Nech  $(G; *)$  je grupa a nech  $x \in G$ . Ak existuje také prirodzené číslo  $n$ , že  $x^n = 1$ , hovoríme, že prvok  $x$  má **konečný rád**. Najmenšie prirodzené číslo  $n$ , pre ktoré je  $x^n = 1$ , nazývame **rád prvku**  $x$ . Ak neexistuje také  $n$ , prvok  $x$  má nekonečný rád.*

**Definícia 3.6.** *Nech  $(G; *)$  je grupa. Ak existuje taký prvok  $x \in G$ , že každý prvok množiny  $G$  je jeho mocninou, tak  $(G; *)$  nazývame **cyklickou grupou** a prvok  $x$  je **generátorom** tejto grupy.*

**Príklad 3.4.** Pre grupu  $(\mathbb{Z}_4; \oplus)$  z príkladu 3.3 dostávame:

$$\bar{1}^1 = \bar{1}, \quad \bar{1}^2 = \bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{2}, \quad \bar{1}^3 = \bar{2} \oplus \bar{1} = \bar{3}, \quad \bar{1}^4 = \bar{3} \oplus \bar{1} = \bar{0} = e,$$

teda prvok  $\bar{1}$  je generátorom grupy a grupa je cyklická. Rád prvku  $\bar{1}$  je 4. Grupa má aj druhý generátor, a to prvok  $\bar{3}$ . Overte, že prvok  $\bar{0}$  má rád 1 a  $\bar{2}$  má rád 2. Keďže grupa  $(K; \cdot)$  je izomorfná s grupou  $(\mathbb{Z}_4; \oplus)$ . Prvky, ktoré sa v izomorfizme navzájom na seba zobrazujú, majú rovnaký rád. Teda grupa  $(K; \cdot)$  má tiež dva generátory a je cyklická. Overte to!

**Poznámka.** Ak sú dve grupy izomorfné, tak sa zhodujú vo všetkých vlastnostiach. Ak sa grupy líšia čo len v jednej vlastnosti, izomorfné nie sú.

**Veta 3.3.** *Nech  $(G; *)$  je cyklická grupa s generátorom  $a$ . Ak existujú také celé čísla  $r < s$ , že  $a^r = a^s$ , tak grupa  $(G; *)$  je konečná. Ak  $|G| = n$ , tak*

$$G = \{a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}\},$$

kde  $a^0$  je neutrálny prvok.

**Príklad 3.5.** Nech  $A = \{2^n; n \in \mathbb{Z}\}$ . Potom  $(A; \cdot)$  je nekonečná cyklická grupa s generátorom  $2^n$ .

**Veta 3.4.** *Každé dve cyklické grupy rovnakého rádu sú izomorfné.*

### 3.3 Podgrupy a rozklady grúp

**Definícia 3.7.** *Nech  $(G; *)$  je grupa a  $\emptyset \neq H \subset G$ . Ak  $(H; *)$  je grupa, tak sa nazýva **podgrupou** grupy  $(G; *)$ .*

**Veta 3.5.** *Nech  $\emptyset \neq H \subset G$  a nech  $(G; *)$  je grupa. Algebraický systém  $(H; *)$  je podgrupou grupy  $(G; *)$  práve vtedy, ak platia podmienky:*

1. *pre každé  $a, b \in H$  aj  $a * b \in H$ ,*
2. *pre každé  $a \in H$  aj  $a' \in H$ .*

**Príklad 3.6.** Nech  $A = \{1, 2, 3\}$ . Potom množina všetkých permutácií na množine  $A$  je množina  $S_3 = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ , kde

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tieto permutácie sú zobrazeniami a môžeme ich skladať. Napr.

$$P_2 \circ P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = P_4,$$

$$P_3 \circ P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = P_5.$$

Výsledky všetkých súčinov (zložení) sa dajú prehľadne zapísať do tabuľky:

| $\circ$ | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $P_1$   | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ |
| $P_2$   | $P_2$ | $P_1$ | $P_4$ | $P_3$ | $P_6$ | $P_5$ |
| $P_3$   | $P_3$ | $P_5$ | $P_1$ | $P_6$ | $P_2$ | $P_4$ |
| $P_4$   | $P_4$ | $P_6$ | $P_2$ | $P_5$ | $P_1$ | $P_3$ |
| $P_5$   | $P_5$ | $P_3$ | $P_6$ | $P_1$ | $P_4$ | $P_2$ |
| $P_6$   | $P_6$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_1$ |

Keďže z prvej kapitoly vieme, že pre skladanie zobrazení platí asociatívny zákon, z tabuľky je zrejmé, že  $(S_3; \circ)$  je nekomutatívna grupa. Nech  $H_1 = \{P_1, P_4, P_5\} \subset S_3$ . Ak sa obmedzíme iba na časť tabuľky s prvkami  $P_1, P_4$  a  $P_5$  v záhlaví, vidíme, že  $(H_1; \circ)$  je tiež grupa, a teda podgrupa grupy  $(S_3; \circ)$ . Naviac ľahko sa dá zistiť, že grupa  $(S_3; \circ)$  nie je cyklická, ale jej podgrupa  $(H_1; \circ)$  cyklická je. Jej generátormi sú prvky  $P_4$  a  $P_5$ . Podobne aj prvky  $P_1, P_2, P_3$  a  $P_6$  nám generujú podmnožiny

$$H_2 = \{P_1\}, \quad H_3 = \{P_1, P_2\}, \quad H_4 = \{P_1, P_3\}, \quad H_5 = \{P_1, P_6\},$$

pričom každý algebraický systém  $(H_i; \circ)$  pre  $i = 2, 3, 4, 5$  je cyklickou podgrupou grupy  $(S_3; \circ)$ , aj keď grupa  $(S_3; \circ)$  cyklická nie je.

Pre podgrupy cyklickej grupy platí nasledujúca veta.

**Veta 3.6.** *Každá podgrupa cyklickej grupy je cyklická.*

Zavedieme si nasledujúce označenia. Nech  $(G; *)$  je grupa a  $(H; *)$  je jej podgrupa. Symbolom  $xH$  označíme množinu všetkých prvkov  $x * h$ , kde  $x \in G$  a  $h \in H$ . Teda pre prvok  $x \in G$  je

$$xH = \{x * h; h \in H\}.$$

Je zrejmé, že pre abelovskú grupu  $(G; *)$  je  $xH = Hx$ .

**Veta 3.7.** Nech  $(H; *)$  je podgrupou grupy  $(G; *)$ . Potom množina

$$G/H = \{xH; x \in G\}$$

tvorí rozklad množiny  $G$ .

**Poznámka.** Množina  $G/H$  sa nazýva **pravým rozkladom grupy**  $(G; *)$  podľa jej podgrupy  $(H; *)$ . Jeho prvky  $xH$  nazývame **pravými triedami rozkladu**. Mohutnosť množiny  $G/H$  nazývame **indexom** podgrupy  $(H; *)$  v grupe  $(G; *)$ .

**Príklad 3.7.** Urobme rozklad grupy  $(S_3; \circ)$  z príkladu 3.6 podľa jej podgrupy  $(H_1; \circ)$ , kde  $H_1 = \{P_1, P_4, P_5\}$ .

**Riešenie.** Pre každé  $x \in G$  utvorme množinu  $xH_1$ :

pre  $x = P_1$  je  $xH_1 = \{P_1 \circ P_1, P_1 \circ P_4, P_1 \circ P_5\} = \{P_1, P_4, P_5\}$

pre  $x = P_2$  je  $xH_1 = \{P_2 \circ P_1, P_2 \circ P_4, P_2 \circ P_5\} = \{P_2, P_3, P_6\}$

pre  $x = P_3$  je  $xH_1 = \{P_3 \circ P_1, P_3 \circ P_4, P_3 \circ P_5\} = \{P_3, P_6, P_2\}$

pre  $x = P_4$  je  $xH_1 = \{P_4 \circ P_1, P_4 \circ P_4, P_4 \circ P_5\} = \{P_4, P_5, P_1\}$

pre  $x = P_5$  je  $xH_1 = \{P_5 \circ P_1, P_5 \circ P_4, P_5 \circ P_5\} = \{P_5, P_1, P_4\}$

pre  $x = P_6$  je  $xH_1 = \{P_6 \circ P_1, P_6 \circ P_4, P_6 \circ P_5\} = \{P_6, P_2, P_3\}$ .

Takže

$$S_3/H_1 = \{\{P_1, P_4, P_5\}\{P_2, P_3, P_6\}\}$$

a index podgrupy  $(H_1; \circ)$  v grupe  $(S_3; \circ)$  je 2. Je vidieť, že v tomto prípade je

$$|S_3/H_1| = \frac{|S_3|}{|H_1|}.$$

O tom, že to platí všeobecne, nás informuje nasledujúca veta.

**Veta 3.8. (Lagrangeova veta.)** *Rád konečnej grupy je celočíselným násobkom rádu každej jej podgrupy.*

**Veta 3.9.** *Každá grupa prvočíselného rádu je cyklická a každý jej prvok, okrem neutrálneho, je jej generátorom.*

**Poznámka.** Z prehľadu o grupách vyplýva, že existuje (až na izomorfizmus) práve jedna grupa rádu 1, 2, 3, 5, 7, a to cyklická grupa. Rád 4 majú dve grupy (neizomorfné): cyklická grupa, ktorá sa objavovala v našich príkladoch, a grupa necyklická. Najmenšou neabelovskou grupou je grupa  $(S_3; \circ)$ . Existujú cyklické grupy ľubovoľného rádu.

## 3.4 Okruhy, telesá, polia

V ďalšom texte budeme pracovať s množinami, na ktorých sú definované dve binárne operácie. Napríklad na množine  $\mathbb{Z}$  všetkých celých čísel sú definované dve binárne operácie, a to sčítavanie  $+$  a násobenie  $\cdot$ . Vieme, že algebraický systém  $(\mathbb{Z}; +)$  je komutatívna (abelovská) grupa a algebraický systém  $(\mathbb{Z}; \cdot)$  je pologrupa (platí uzavretosť množiny  $\mathbb{Z}$  vzhľadom na operáciu  $\cdot$  a tiež asociatívnosť). Okrem toho pre všetky  $x, y, z \in \mathbb{Z}$  je

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Hovoríme, že násobenie je **distributívne** vzhľadom na operáciu sčítavania.

**Definícia 3.8.** *Nech na množine  $A \neq \emptyset$  sú definované dve binárne operácie  $\square$  a  $*$ . Algebraický systém  $(A; \square, *)$  sa nazýva **okruh**, práve vtedy, ak:*

1.  $(A; \square)$  je komutatívna grupa,

2.  $(A; *)$  je pologrupa,  
 3. Operácia  $*$  je distributívna vzhľadom na operáciu  $\square$ , to znamená, že pre všetky  $x, y, z \in A$  platí

$$x * (y \square z) = (x * y) \square (x * z) \quad a \quad (x \square y) * z = (x * z) \square (y * z).$$

### Poznámky.

1. V algebraickom systéme  $(A; \square, *)$  je dôležité poradie operácií, nemôžeme ich poradie vymeniť. Napr. algebraický systém  $(\mathbb{Z}; \cdot, +, \cdot)$  nie je okruh, pretože  $(\mathbb{Z}; \cdot)$  nie je grupa, ale  $(\mathbb{Z}; +)$  okruhom je.

2. Neutrálny prvok operácie  $\square$  budeme označovať  $e(\square)$  (často sa nazýva nula). Neutrálny prvok operácie  $*$  (ak existuje) označíme symbolom  $e(*)$  (zvykne sa nazývať jednotka). V okruhu  $(A; +, \cdot)$  je to 0, resp. 1.

3. Ak operácia  $*$  je komutatívna, okruh nazývame komutatívny.

4. Pod triviálnym okruhom rozumieme okruh, ktorý obsahuje iba prvok  $e(\square)$ . V ostatných prípadoch hovoríme o netriviálnom okruhu.

Príkladmi okruhov sú napríklad číselné  $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{C}; +, \cdot)$ . Skúmanie okruhov začalo práve na číselných množinách s operáciami  $+$  a  $\cdot$ , ale ich vlastnosti sa ľahko dajú preniesť a na iné okruhy.

**Príklad 3.8.** Nech  $M_n$  je množina všetkých štvorcových matíc rádu  $n$  ( $n$  je pevne zvolené),  $n \geq 2$ , ktorých prvky sú reálne čísla. Ľahko sa preverí, že  $(M_n; +, \cdot)$ , kde  $+$  a  $\cdot$  je sčítavanie a násobenie matíc, je okruh. Nech  $a \neq 0$  je reálne číslo. Utvorme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice na ľavej strane majú práve po jednom nenulovom prvku  $a$ , teda sú nenulové. Súčin matíc stručne zapíšeme

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{0},$$

kde  $\mathbf{K}, \mathbf{M}, \mathbf{0}$  sú uvažované matice z množiny  $M_n$ . Zistili sme, že súčin dvoch nenulových matíc je nulová matica, čiže súčin dvoch nenulových prvkov (rôznych od  $e(+)$ )  $\mathbf{K}$  a  $\mathbf{M}$  je nulový prvok  $\mathbf{0}$  (neutrálny prvok vzhľadom na operáciu  $+$ ). Obdoba toho v číselných okruhoch  $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}; +, \cdot)$  a  $(\mathbb{C}; +, \cdot)$  neexistuje.

**Definícia 3.9.** Hovoríme, že prvok  $a \in A$ ,  $a \neq e(\square)$ , v okruhu  $(A; \square, *)$  je netriviálnym deliteľom nuly práve vtedy, ak existuje prvok  $b \in A$ ,  $b \neq e(\square)$ , taký, že

$$a * b = e(\square) \quad \text{alebo} \quad b * a = e(\square).$$

V príklade 3.8 matice  $\mathbf{K}$  a  $\mathbf{M}$  sú netriviálnymi deliteľmi nuly v okruhu  $(M_n; +, \cdot)$ .

**Definícia 3.10.** Okruh, ktorý má aspoň dva prvky a nemá netriviálne delitele nuly, nazývame **obor integrity**.

**Príklad 3.9.** Presvedčíte sa, že algebraické systémy  $(\mathbb{Z}_5; \oplus, \odot)$  a  $(\mathbb{Z}_6; \oplus, \odot)$  sú okruhy. Z Cayleyho tabuliek pre príslušné operácie ľahko zistíte, že  $(\mathbb{Z}_5; \oplus, \odot)$  je obor integrity.  $(\mathbb{Z}_6; \oplus, \odot)$  oborom integrity nie je, pretože napr.  $\bar{3} \odot \bar{2} = \bar{0}$ .

**Veta 3.10.** Okruh  $(\mathbb{Z}_n; \oplus, \odot)$  je oborom integrity práve vtedy, ak  $n$  je prvočíslo.

**Definícia 3.11.** Okruh  $(A; \square, *)$  nazývame **telesom** práve vtedy, ak  $(A \setminus \{e(\square)\}; \square, *)$  je grupa.

**Veta 3.11.** Každé teleso je oborom integrity.

**Definícia 3.12.** Teleso  $(A; \square, *)$ , v ktorom  $(A \setminus \{e(\square)\}; *)$  je komutatívna (abelovská) grupa nazývame **pole**.

**Poznámka.** Dá sa dokázať, že okruh  $(\mathbb{Z}_n; \oplus, \odot)$  je pole práve vtedy, ak  $n$  je prvočíslo.

## 3.5 Úlohy

3.1. Na množine všetkých nepárnych prirodzených čísel sú definované operácie  $\square$  a  $*$  takto:

$$\begin{aligned} x \square y &= x + y + 1, \\ x * y &= 0, 5(x + 1)(y + 1) - 1. \end{aligned}$$

Dokážte, že operácia  $*$  je distributívna vzhľadom na operáciu  $\square$ .

3.2. Nech pre ľubovoľné  $x, y \in \mathbb{N}$  je  $x \diamond y = y^x$ . Nájdite všetky  $x \in \mathbb{N}$ , pre ktoré platí  $x \diamond 2 = 2 \diamond x$ . ďalej nájdite aspoň jednu trojicu  $x, y, z \in \mathbb{N}$ , pre ktorú platí

$$(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z).$$

3.3. Označme  $p\mathbb{Z}$  ( $n\mathbb{Z}$ ) množinu všetkých párnych (nepárnych) celých čísel. Zistite, ktoré z nasledujúcich algebraických systémov sú uzavreté vzhľadom na operáciu:

- a)  $(p\mathbb{Z}; +)$ ,                      b)  $(p\mathbb{Z}; \cdot)$ ,                      c)  $(n\mathbb{Z}; \cdot)$ .

3.4. Zistite, ktoré z nasledujúcich algebraických systémov sú grupy:

- a)  $(A; \cdot)$ , kde  $A = \{z \in \mathbb{C}; z^6 - 1 = 0\}$ ,  
b)  $(B; \cdot)$ , kde  $B = \{z \in \mathbb{C}; z^6 + 1 = 0\}$ ,  
c)  $(\mathbb{Z}; \diamond)$ , kde  $a \diamond b = a + b - 5$  pre všetky  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  
d)  $(\mathbb{Z}; \square)$ , kde  $a \square b = a + b + a \cdot b$  pre všetky  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

3.5. Zistite, ktoré z nasledujúcich podmnožín množiny všetkých komplexných čísel  $\mathbb{C}$  s operáciou  $+$  sú podgrupami grupy  $(\mathbb{C}; +)$ :

- a) množina všetkých rýdzo imaginárnych čísel,
- b) množina všetkých komplexných čísel  $a + ib$ , kde  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,
- c) množina všetkých komplexných čísel s absolútnou hodnotou rovnou 1.

3.6. Zistite, či  $(A; \circ)$  je grupa, ak  $A = \{f_1, f_2, \dots, f_6\}$ , kde pre  $i = 1, 2, \dots, 6$  sú  $f_i$  zobrazenia z množiny  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  do množiny  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  definované:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x, & f_2(x) &= \frac{1}{x}, & f_3(x) &= 1 - x, \\ f_4(x) &= \frac{1}{1-x}, & f_5(x) &= 1 - \frac{1}{x}, & f_6 &= \frac{x}{x-1}. \end{aligned}$$

3.7. Nájdite všetky generátory cyklickej grupy  $(\mathbb{Z}_{10}; \oplus)$ .

3.8. Zistite, či algebraický systém  $(A; +, \cdot)$  je okruh, ak:

- a)  $A = \{a + b\sqrt[3]{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ ,
- b)  $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ ,
- c)  $A = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$ ,
- d)  $A = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ ,
- e)  $A = \{a + ib; a, b \in \mathbb{Q}\}$ .

3.9. Zistite, či  $(H; \cdot)$  je podgrupou grupy  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$ , ak  $H = \{-1, 1\}$ .

3.10. Overte, či algebraický systém  $(A; +, \cdot)$  je okruh, teleso alebo pole, ak:

- a)  $A = \{a + b\sqrt{7}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ ,
- b)  $A = \{a + b\sqrt{7}; a, b \in \mathbb{Z}\}$ .

# Kapitola 4

## Neorientované grafy

### 4.1 Definícia a základné typy grafov

V predchádzajúcich kapitolách sme viackrát využili možnosť vyjadriť určité vzťahy pomocou grafov. Boli to napríklad diagramy binárnych relácií, zobrazení, alebo čiastočných usporiadaní. Nešlo pritom o grafy funkcií, ktoré vyjadrujú vzťahy medzi veličinami (premennými), ktoré poznáme z matematickej analýzy.

Teória grafov je pomerne mladá matematická disciplína, aj keď prvá práca z teórie grafov, Eulerovo pojednanie o mostoch mesta Kráľovca (dnešný Kaliningrad), je z roku 1736. Prudký rozvoj teórie grafov nastal až v druhej polovici 20. storočia v súvislosti s rozvojom počítačov a veľkými požiadavkami na algoritmizáciu rôznych úloh. V tomto učebnom texte sa oboznámime so stručnými základmi neorientovaných a orientovaných grafov a s niektorými ich aplikáciami v elektrotechnike ako aj pri algoritmickom riešení rôznych úloh z praxe.

**Definícia 4.1.** *Graf  $G$  je usporiadaná dvojica  $(V, H)$ , kde  $V$  je nejaká neprázdna množina a  $H$  je množina dvojprvkových podmnožín množiny  $V$ . Prvky množiny  $V$  nazývame **vrcholy** grafu  $G$  a prvky množiny  $H$  nazývame **hrany** grafu  $G$ .*

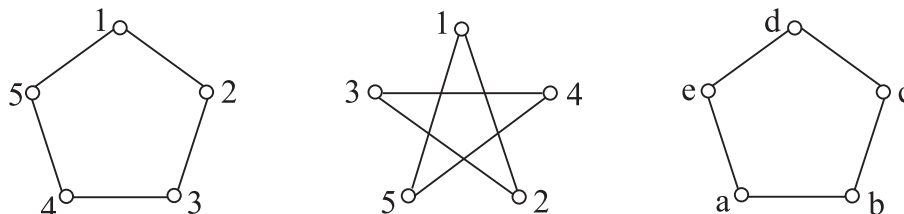
V našom texte budeme uvažovať grafy s konečnou množinou vrcholov (v niekoľkých prípadoch, keď budeme uvažovať nekonečné grafy, to zvlášť zdôraznime).

Ak chceme zdôrazniť, že graf má množinu vrcholov  $V$  a množinu hrán  $H$ , píšeme  $G = (V, H)$ . Ak hovoríme o nejakom známom grafe  $G$ , jeho množinu vrcholov označujeme  $V(G)$ , podobne množinu hrán grafu  $G$  označujeme  $H(G)$ .

Graf je teda rýdzo kombinatorický objekt, ktorý dáva do vzájomných vzťahov prvky dvoch množín. Zdôrazňujeme to preto, že postupne sa budeme vyjadrovať dosť obrazne a grafy znázorňovať kreslením do roviny. Vrcholom grafu sa priradia body roviny (vyznačené krúžkami) a hrany sa vyjadrujú spojením príslušných dvojíc bodov rovnými alebo zakrivenými čiarami. Takému znázorneniu grafu budeme hovoriť **diagram grafu**. Pozor, dva rôzne grafy môžu mať rovnaký diagram a naopak, ten istý graf sa dá znázorniť pomocou dosť nepodobných

„obrázkov“.

**Príklad 4.1.** Na obr. 4.1 sú dva rôzne diagramy grafu  $G_1 = (V_1, H_1)$ , kde  $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  a  $H_1 = \{\{1, 2\}\{2, 3\}\{3, 4\}\{4, 5\}\{1, 5\}\}$  a diagram grafu  $G_2 = (V_2, H_2)$ , kde  $V_2 = \{a, b, c, d, e\}$  a  $H_2 = \{\{a, b\}\{b, c\}\{c, d\}\{d, e\}\{e, a\}\}$ .



Obr. 4.1

Budeme hovoriť, že hrana  $\{u, v\}$  **inciduje** s vrcholmi  $u$  a  $v$  (v diagrame sú vrcholy  $u$  a  $v$  spojené čiarou). Tiež sa dá povedať, že vrchol inciduje s hranou. Dva vrcholy sa nazývajú **susedné**, ak incidujú s tou istou hranou, dve hrany nazývame **susedné**, ak incidujú s tým istým vrcholom.

**Poznámka.** Niekedy sa na riešenie problémov z praxe využívajú aj grafy s viacnásobnými hranami (v diagrame je dvojica vrcholov spojená viacerými čiarami), tzv. **multigrafy**, alebo grafy, v ktorých hrana (tzv. **slučka**) inciduje dvakrát s tým istým vrcholom. Ak graf môže obsahovať slučky aj násobné hrany, hovoríme o **pseudografe**.

Uvedieme si niekoľko typov grafov, ktoré sa často využívajú, a preto dostali špeciálne pomenovania:

**Kompletný graf** na  $n \geq 1$  vrchoch je graf  $K_n = (V, H)$ , kde  $|V| = n$  a  $H$  obsahuje všetky dvojprvkové podmnožiny vrcholovej množiny (v diagrame je spojená hranou každá dvojica vrcholov).

**Kompletný bipartitný graf**  $K_{m,n} = (V, H)$ , kde  $m, n \geq 1$ , je graf, v ktorom

$$V = \{u_1, \dots, u_m\} \cup \{v_1, \dots, v_n\}, \quad H = \{\{u_i, v_j\}; i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

**Kružnica** dĺžky  $n \geq 1$  je graf  $C_n = (V, H)$ , kde

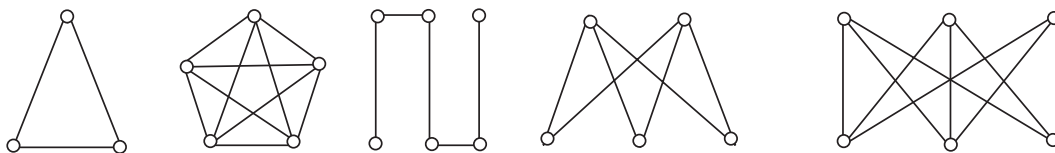
$$V = \{1, 2, \dots, n\}, \quad H = \{\{i, i+1\}; i = 1, \dots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\}.$$

**Cesta** dĺžky  $n \geq 0$  je graf  $P_n = (V, H)$ , kde

$$V = \{0, 1, \dots, n\}, \quad H = \{\{i-1, i\}; i = 1, \dots, n\}.$$

**Komplement** grafu  $G = (V, H)$  je graf  $\bar{G} = (V, H')$ , kde  $H'$  obsahuje všetky hrany chýbajúce v grafe  $G$  k tomu, aby bol kompletným grafom, pričom  $H \cup H' = \emptyset$ .

Kružnica  $C_5$  je na obr. 4.1. Na obr. 4.2 sú postupne grafy:  $K_3$ ,  $K_5$ ,  $P_5$ ,  $K_{2,3}$  a  $K_{3,3}$ .



Obr. 4.2

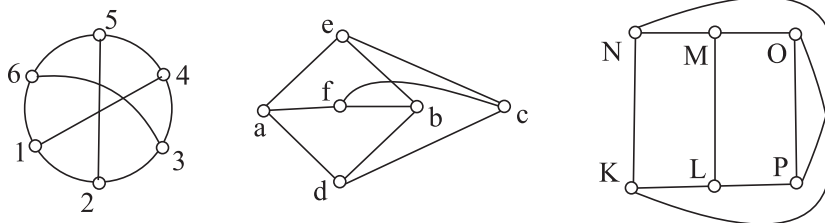
Dva grafy  $G$  a  $G'$  považujeme za rovnaké, ak majú totožné množiny vrcholov a hrán, teda  $G = G'$  znamená, že  $V(G) = V(G')$  a  $E(G) = E(G')$ . Mnoho grafov sa však líši iba označením svojich vrcholov a hrán. Toto vystihuje pojem *izomorfizmus*.

**Definícia 4.2.** Dva grafy  $G = (V, E)$  a  $G' = (V', E')$  sa nazývajú **izomorfné**, ak existuje bijektívne zobrazenie  $f : V \rightarrow V'$  také že pre všetky  $u, v \in V$ :

$$\{u, v\} \in E \quad \text{práve keď} \quad \{f(u), f(v)\} \in E',$$

Zobrazenie  $f$  nazývame **izomorfizmus** grafov  $G$  a  $G'$ . Fakt, že grafy  $G$  a  $G'$  sú izomorfné zapisujeme  $G \cong G'$ .

**Príklad 4.2.** Na obr. 4.3 sú diagramy troch izomorfných grafov. Nájdite príslušné izomorfizmy.



Obr. 4.3

**Riešenie.** Jeden z izomorfizmov medzi prvým a druhým grafom je napríklad

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & d & b & e & c & f \end{pmatrix}.$$

Existuje viac možností. Zvyšok ponecháme na čitateľa. Všetky tri grafy sú izomorfné s grafom  $K_{3,3}$ .

Z definície 4.2 vyplýva, že pre dva izomorfné grafy  $G_1 = (V_1, H_1)$  a  $G_2 = (V_2, H_2)$  platí

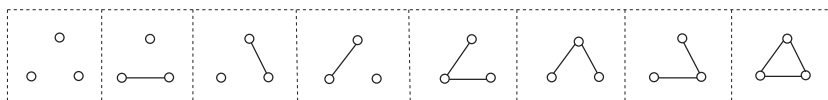
$$|V_1| = |V_2|, \quad |H_1| = |H_2|.$$

Je zrejmé, že splnenie týchto dvoch podmienok ešte nezaručuje, že nejaké dva grafy sú izomorfné.

**Definícia 4.3.** Hovoríme, že graf  $G_1$  je **podgrafom** grafu  $G$ , ak  $V(G_1) \subset V(G)$  a  $H(G_1) \subset H(G)$ . Zapisujeme to:  $G_1 \subset G$ .

**Definícia 4.4.** Podgraf  $G' = (V, H')$  grafu  $G = (V, H)$  nazývame **faktor** grafu  $G$ .

Faktor grafu je teda taký podgraf, ktorý obsahuje všetky vrcholy daného grafu. Rôzne faktory sa môžu líšiť nielen počtom hrán, ale aj rôznym zložením hranových množín.



Obr. 4.4

Na obr. 4.4 sú diagramy všetkých faktorov grafu  $K_3$ . Je ich 6 (vrcholy na tej istej pozícii môžeme uvažovať za rovnako označené), ale ak by sme za rôzne považovali iba neizomorfné faktory, tak by boli iba 4 rôzne. Je vidieť, že v niektorých faktoroch (grafoch) sú aj vrcholy, ktoré neincidujú so žiadnou hranou.

## 4.2 Stupne vrcholov, súvislosť a metrika

**Definícia 4.5.** Nech  $G$  je graf a  $v$  jeho vrchol. Symbolom  $\delta_G(v)$  označme počet hrán inciduujúcich s vrcholom  $v$ . číslo  $\delta_G(v)$  nazývame **stupeň vrcholu**  $v$  v grafe  $G$ . Ak  $\delta_G(v) = 0$ , vrchol  $v$  nazývame **izolovaný vrchol**.

Ak nemôže dôjsť k zámene, tak index  $G$  v  $\delta_G(v)$  vynechávame. Graf nemôže mať úplne ľubovoľné stupne vrcholov. Maximálny stupeň (označuje sa symbolom  $\Delta(G)$ ) v grafe s  $n$  vrcholmi je  $n - 1$  a minimálny 0.

**Veta 4.1.** Pre každý graf  $G = (V, H)$  platí

$$\sum_{v \in V} \delta_G(v) = 2|H|.$$

Je to zrejmé, pretože každá hrana inciduje s dvoma vrcholmi a keď spočítavame stupne vrcholov, tak každú hranu zarátame dvakrát. Z tejto vety vyplýva dôležitý dôsledok.

**Dôsledok 4.1.** Počet vrcholov s nepárnyim stupňom je v každom grafe číslo párne.

Ak má graf všetky vrcholy rovnakého stupňa  $k$ , nazývame ho **pravidelným grafom stupňa  $k$** . Je zrejmé, že kompletý graf  $K_n$  je pravidelným grafom stupňa

$n - 1$ . Z dôsledku je zrejmé, že pravidelný graf nepárneho stupňa nemôže mať nepárny počet vrcholov.

Nech pre danú dvojicu vrcholov  $u$  a  $v$  v grafe  $G = (V, H)$  existuje postupnosť vrcholov a hrán

$$v_0, h_1, v_1, h_2, v_2, \dots, v_{n-1}, h_n, v_n,$$

kde  $v_i \in V$  pre  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , pričom  $v_0 = u$ ,  $v_n = v$  a  $h_{i+1} = \{v_i, v_{i+1}\}$  pre  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ . Takúto postupnosť nazývame **sledom** dĺžky  $n$  medzi vrcholmi  $u$  a  $v$ . Ak  $u = v$  ( $u \neq v$ ), tak sled je **uzavretý** (**otvorený**). Obvykle na určenie sledu zapisujeme iba postupnosť vrcholov, teda  $v_0 v_1 v_2 \dots v_n$ .

Všimnime si, že pre sled sme nepožadovali aby vrcholy (hrany) boli rôzne. Preto medzi dvojicou vrcholov grafu buď existuje nekonečne veľa sledov, alebo neexistuje žiadny. Sledy môžeme rozdeliť na nasledujúce typy:

**ťah** je sled, v ktorom sú všetky hrany rôzne.

**Cesta** je ťah, v ktorom sú všetky vrcholy (a tým aj hrany) rôzne. Cestu dĺžky  $n$  (počet jej hrán) označujeme  $P_n$ .

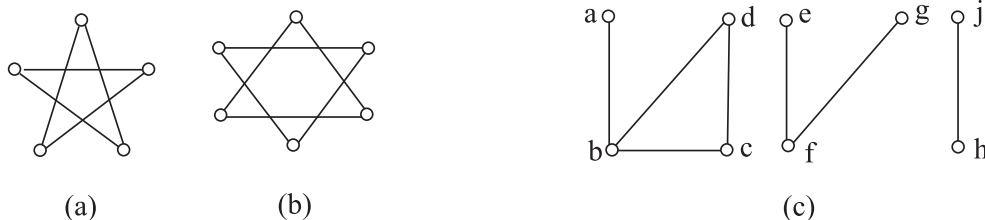
**Kružnica** je uzavretá cesta dĺžky aspoň 3. Kružnica  $C_n$  dĺžky  $n$  má práve  $n$  vrcholov. (Všimnite si, že už skôr sme zaviedli ten istý pojem iným spôsobom.)

Je zrejmé, že z každého sledu  $S$  medzi vrcholmi  $u$  a  $v$  grafu  $G$  môžeme vybrať cestu, ktorá spája tieto vrcholy.

**Definícia 4.6.** Hovoríme, že graf  $G$  je **súvislý**, ak pre každé dva jeho vrcholy  $u$  a  $v$  existuje v ňom sled (cesta) z  $u$  do  $v$ . Graf, ktorý nie je súvislý, sa nazýva **nesúvislý**.

Ak v nejakom grafe  $G$  zvolíme vrchol  $v$ , môžeme sa zaujímať o všetky vrcholy, do ktorých sa dá dostať po sledoch začínajúcich vo vrchole  $v$ . Tieto vrcholy a hrany, ktoré s nimi incidujú, tvoria súvislý podgraf grafu  $G$ , ktorý nazývame *komponent* grafu obsahujúci vrchol  $v$ . Presnejšia definícia je:

**Definícia 4.7. Komponent** grafu je každý jeho maximálny súvislý podgraf (t.j. taký súvislý podgraf, ktorý nie je vlastným podgrafom iného súvislého podgrafu grafu  $G$ ).



Obr. 4.5

Na obr. 4.5(a) je príklad súvislého grafu, zatiaľ čo na obr. 4.5(b) je príklad nesúvislého grafu. Na obr. 4.5(c) je nesúvislý graf s tromi komponentmi. Jeho

podgraf pozostávajúci z troch vrcholov  $a, b, d$  a z dvoch hrán  $\{a, b\}$  a  $\{b, d\}$  nie je komponentom, hoci jeho diagram vyzerá rovnako ako diagram komponentu s vrcholmi  $e, f, g$ . Je totiž vlastným podgrafom komponentu so štyrmi vrcholmi  $a, b, c, d$ .

Súvislý graf má iba jeden komponent. Rozhodnúť, či graf je súvislý, poprípadе nájsť všetky jeho komponenty, nie je ťažké, hoci z diagramu to nemusí byť vždy na prvý pohľad zrejmé. Súvislosť grafu je typická globálna vlastnosť grafu. Niekedy sa však o nej dá rozhodnúť na základe lokálnych vlastností grafu, teda z vlastností bezprostredného okolia jednotlivých vrcholov a hrán.

**Veta 4.2.** *Nech  $G = (V, H)$ ,  $|V| = n$ , je graf, v ktorom súčet stupňov ľubovoľnej dvojice nesusedných vrcholov je aspoň  $n - 1$ . Potom graf  $G$  je súvislý.*

**Veta 4.3.** *Nech  $G = (V, H)$ ,  $|V| \geq 2$ , je súvislý graf. Potom v grafe  $G$  existujú aspoň dva vrcholy také, že vynechaním ľubovoľného z nich sa súvislosť neporuší.*

**Artikulácia** je vrchol grafu, ktorý ak z grafu vynecháme (aj hrany, ktoré s ním incidujú), poruší sa súvislosť grafu (v nesúvislom grafe sa zväčší počet komponentov). Hranu s tou istou vlastnosťou nazývame **most**.

**Veta 4.4.** *Nech  $G = (V, H)$  je konečný súvislý graf s  $n$  vrcholmi. Potom platí*

$$n - 1 \leq |H| \leq \frac{n(n - 1)}{2}.$$

Predstavme si cestnú sieť mesta vyjadrenú grafom. Je namieste pýtať sa na najkratšiu dopravnú trasu pre jazdu autom z miesta  $A$  do miesta  $B$ . Takéto a podobné úvahy vedú k zavedeniu pojmu vzdialenosti v grafe.

**Definícia 4.8.** *Nech  $G = (V, H)$  je súvislý graf. Vzdialenosť  $d(u, v)$  vrcholov  $u, v$  grafu  $G$  je dĺžka najkratšej cesty spájajúcej vrcholy  $u$  a  $v$ .*

Na vzdialenosť v grafe sa môžeme pozeráť ako na zobrazenie  $d : V \times V \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ , ktoré má nasledujúce vlastnosti:

1.  $d(u, v) \geq 0$ ;  $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ ,
2.  $d(u, v) = d(v, u)$ ,
3.  $d(u, v) \leq d(u, z) + d(z, v)$  pre všetky  $z \in V$ .

Tieto vlastnosti sú axiómy metriky, preto usporiadaná dvojica  $(V, d)$  je metrický priestor. Pritom  $V$  je vrcholová množina grafu a  $d$  je metrika – vzdialenosť vrcholov v grafe. Uvedené vlastnosti sa pri izomorfizme zachovávajú, preto sú užitočné aj pojmy, ktoré sú definované pomocou metriky. Nasledujúca definícia uvádza niektoré u nich.

**Definícia 4.9.** *Nech  $G = (V, H)$  je súvislý graf.*

**Exentricita vrcholu**  $u \in V$  je číslo

$$e(u, G) = \max_{v \in V} d(u, v).$$

**Priemer grafu**  $G$  je číslo

$$P(G) = \max_{v \in V} e(v, G).$$

**Polomer grafu**  $G$  je číslo

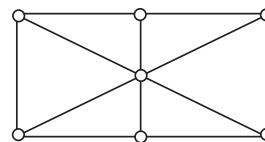
$$r(G) = \min_{v \in V} e(v, G).$$

**Stred grafu**  $G$  je množina vrcholov, ktorých excentricita je rovná polomeru.

**Poznámka.** Priemer grafu  $G$  môžeme definovať aj vzťahom

$$P(G) = \max_{u, v \in V} d(u, v).$$

Pre grafy neplatí obdoba vzťahu medzi priemerom a polomerom z geometrickej kružnice. Napríklad pre graf, ktorého diagram je na obr. 4.6 je  $P(G) = r(G) = 2$  a stred je celá vrcholová množina. Všimnime si podrobnejšie vzájomný vzťah priemeru a polomeru toho istého grafu.



Obr. 4.6

**Veta 4.5.** *Nech  $G = (V, H)$  je súvislý graf. Potom platí*

$$r(G) \leq P(G) \leq 2r(G).$$

## 4.3 Eulerovkosť, hamiltonovkosť a planárnosť

Pojmy a vlastnosti, ktoré si uvedieme v tomto paragrafe, sa využívajú pri riešeníach praktických úloh za pomoci teórie grafov.

Jednou zo základných (a najstarších) úloh týkajúcich sa grafov je nasledujúca otázka: *Dá sa nakresliť diagram daného grafu  $G = (V, H)$  jedným uzavretým ťahom bez zdvihnutia ceruzky z papiera tak, aby sme po žiadnej hrane neprechádzali viackrát?*

Matematicky môžeme úlohu sformulovať takto: Dá sa v grafe nájsť uzavretý sled, v ktorom sa každá hrana vyskytuje práve raz? Taký sled nazývame **uzavretým eulerovským ťahom**. Graf je **eulerovský** práve vtedy, keď obsahuje aspoň jeden uzavretý eulerovský ťah. Hovoríme tiež, že graf sa dá **pokryť** uzavretým ťahom. Dá sa ukázať, že eulerovské grafy môžeme jednoznačne charakterizovať bez toho, aby sme hovorili o ťahoch. Platí nasledujúca veta.

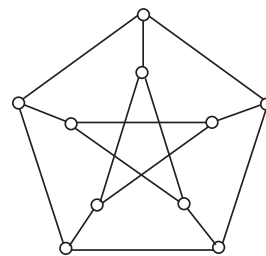
**Veta 4.6. (Charakteristika eulerovských grafov.)** *Graf je eulerovský práve vtedy, ak je súvislý a každý jeho vrchol má párny stupeň.*

Ak graf nie je eulerovský, často nás zaujíma minimálny počet hranovo disjunktných otvorených ťahov, ktorými sa dá pokryť. Pre súvislý graf môžeme nájsť minimálne pokrytie  $p$  otvorenými ťahmi práve vtedy, ak obsahuje  $2p$  ( $p \geq 1$ ) vrcholov nepárneho stupňa. Tieto otvorené ťahy začínajú a končia vždy vo vrchoch nepárnych stupňov. Ak je graf nesúvislý, uvažujeme každý komponent zvlášť. (Nakreslite si známy „domček“ s piatimi vrcholmi a ôsmimi hranami jedným ťahom.)

Jedna vec je vedieť, že graf je eulerovský, to sa dá ľahko zistiť, iné je uzavretý eulerovský ťah nájsť. Pri hľadaní uzavretého ťahu začneme v ľubovoľnom vrchole a po hrane s ním incidentnej prejdeme do nejakého susedného vrcholu. Použitú hranu z grafu odoberieme a postupujeme rovnakým spôsobom ďalej až sa nakoniec vrátime do vrcholu, v ktorom sme začínali. Výber hrany je viazaný iba podmienkou, aby jej vypustením nevznikol nesúvislý graf (izolované vrcholy pripúšťame, ale štartovací vrchol sa stane izolovaným až v poslednom kroku).

**Hamiltonovská kružnica** v grafe  $G$  je kružnica obsahujúca všetky vrcholy grafu  $G$ . Graf nazývame **hamiltonovský**, ak obsahuje aspoň jednu hamiltonovskú kružnicu. Aby bol graf hamiltonovský, musí byť konečný, súvislý, musí obsahovať aspoň jeden vrchol a nesmie obsahovať mosty ani artikulácie. Avšak ani splnenie uvedených podmienok nezaručuje existenciu hamiltonovskej kružnice. Napríklad **Petersenov** graf na obr. 4.7 nie je hamiltonovský.

Pojem hamiltonovskej kružnice je na prvý pohľad podobný uzavretému eulerovskému ťahu: Hamiltonovská kružnica má prechádzať bez opakovania všetky vrcholy a uzavretý eulerovský ťah všetky hrany. Napriek tomu je matematická obtiažnosť oboch problémov veľmi rozdielna. Zatiaľ čo uzavreté eulerovské ťahy sú ľahko zvládnuteľné, problém existencie hamiltonovskej kružnice je mimoriadne náročný a doteraz nepoznáme žiadnu jednoduchú charakteristiku hamiltonovských grafov. Tejto problematike sa venuje veľké množstvo matematikov a dosiahli obrov-



Obr. 4.7

ské množstvo čiastočných výsledkov, nie však nutnú a postačujúcu podmienku existencie hamiltonovskej kružnice. My si uvedieme dve postačujúce podmienky.

**Veta 4.7.** *Nech  $G = (V, H)$  je graf,  $|V| = n$ ,  $n \geq 3$ . Ak stupeň každého vrcholu grafu je aspoň  $\frac{n}{2}$ , tak  $G$  je hamiltonovský graf.*

**Veta 4.8.** *Ak pre ľubovoľné dva nesusedné vrcholy  $u, v$  grafu  $G = (V, H)$ ,  $|V| = n$ ,  $n \geq 3$ , platí*

$$\delta(u) + \delta(v) \geq n,$$

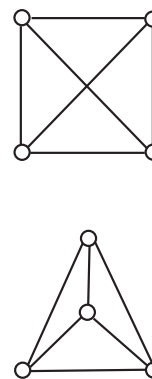
*tak graf  $G$  je hamiltonovský.*

S hamiltonovskými grafmi sa možno stretnúť v rôznych súvislostiach aj mimo matematiky. Napríklad americký vedec J. Lederberg, nositeľ Nobelovej ceny za medicínu, použil hamiltonovské grafy v chémii pri klasifikácii organických zlúčenín. My sa s niektorými aplikáciami stretneme neskôr.

V diagrame Petersenovho grafu na obr. 4.7 sa niektoré hrany pretínajú. Môžeme si postaviť otázku, či je to nutné. Skúste tento diagram prekresliť. Ak neurobíte chybu, tak sa vám to bez pretínania hrán nepodarí.

**Definícia 4.10.** Graf  $G = (V, H)$  je **planárny** (rovinný), ak jeho diagram v rovine môžeme zostrojiť tak, že dve rôzne hrany majú spoločné nanajvýš krajné vrcholy. Ak  $G$  nie je planárny, tak ho nazývame **neplanárny**.

V prípade planárneho grafu ide teda o *možnosť* nakresliť jeho diagram požadovaným spôsobom. Planárny je napríklad graf  $K_4$ , ktorého dva diagramy sú na obr. 4.8, hoci v jednom z nich sa hrany pretínajú. Diagram bez pretínania hrán rozdeľuje rovinu na disjunktné oblasti (ak obsahuje aspoň jednu kružnicu) a tie budeme nazývať **oblasťami planárneho grafu**. Neohraničenú oblasť nazývame vonkajšia a vhodným prekreslením diagramu sa dá dosiahnuť, že vonkajšou oblasťou bude hociktorá z nich. O oblastiach nemá zmysel hovoriť, ak máme diagram s priesečníkmi. Môžeme sa však pýtať, koľko oblastí má diagram planárneho grafu, ak ho znázorníme bez pretínania hrán.



Obr. 4.8

**Veta 4.9. (Eulerova veta o planárnych grafoch.)** *Nech  $G = (V, H)$  je súvislý planárny graf. Nech  $r$  je počet oblastí grafu  $G$ . Potom platí*

$$|H| - |V| + 2 = r.$$

Z tejto veľmi dôležitej vety môžeme odvodiť nasledujúce závery.

**Dôsledky.**

1. Ak  $G = (V, H)$  je súvislý planárny graf, tak  $|H| \leq 3|V| - 6$ .
2. Ak  $G = (V, H)$  je súvislý planárny graf bez trojuholníkov, tak  $|H| \leq 2|V| - 4$ .
3. Každý planárny graf obsahuje aspoň jeden vrchol, ktorého stupeň je menší ako šesť.
4. Grafy  $K_5$  a  $K_{3,3}$  sú neplanárne.

Uvedené grafy  $K_5$  a  $K_{3,3}$  predstavujú najmenšie neplanárne grafy.  $K_5$  má najmenší počet vrcholov a  $K_{3,3}$  najmenší počet hrán zo všetkých neplanárnych grafov. Tieto dva grafy hrajú veľmi dôležitú úlohu pri charakterizácii planárnych

grafov. Uvažujme graf  $G = (V, H)$  s aspoň jednou hranou. Ak z neho vynecháme hranu  $\{u, v\}$  a nahradíme ju dvoma novými hranami  $\{u, z\}$  a  $\{z, v\}$ , povieme, že nový graf vznikol **rozpoľením** hrany. Dva grafy nazveme **homeomorfné**, ak sú izomorfné, alebo vznikli postupným rozpoľovaním hrán (aspoň u jedného z nich) z toho istého grafu.

Problematiku planárnosti grafov s využitím výhradne kombinatorických vlastností, teda bez odvolávania sa na kreslenie diagramov, rieši nasledujúca elegantná veta.

**Veta 4.10. (Kuratowského veta.)** *Graf  $G$  je planárny práve vtedy, ak neobsahuje podgraf homeomorfný s grafom  $K_5$  ani s grafom  $K_{3,3}$ .*

**Príklad 4.3.** V Petersenovom grafe na obr. 4.7 nájdite podgraf homeomorfný s grafom  $K_{3,3}$ . Tým ukážete, že nie je planárny. Môže obsahovať aj podgraf homeomorfný s  $K_5$ ?

Problematika kreslenia diagramov grafov nie je jednoduchá, a to ani pre grafy planárne. Ak sú grafy neplanárne, ich diagramy sa dajú znázorniť len tak, že niektoré hrany sa pretínajú v nekonečných bodoch. To vedie k skúmaniu rôznych mier neplanárnosti grafov. Typickými príkladmi z praxe, kde sa tieto výsledky intenzívne využívajú sú tzv. VLSI obvody, čo sú veľmi husto integrované elektronické prvky pospájané mikrovodičmi. Rovinné siete sa pritom skladajú na seba a prepojenia, ktoré sa nedajú urobiť v rovine bez pretínania, musia sa realizovať medzi jednotlivými vrstvami. Ide pritom o minimalizáciu takých prepojení a o nahustenie čo najviac prvkov do jednej vrstvy.

## 4.4 Úlohy

- 4.1. Zistite, či existuje konečný graf, v ktorom žiadne dva rôzne vrcholy nemajú rovnaký stupeň.
- 4.2. Je daný graf, ktorý má aspoň dva vrcholy a menej hrán ako vrcholov. Môže mať každý vrchol grafu stupeň aspoň dva?
- 4.3. Nech  $\overline{G}$  je komplementárny graf ku grafu  $G$  a nech  $G$  má aspoň dva komponenty.
  - a) Aký je maximálny počet komponentov grafu  $\overline{G}$ ?
  - b) Aký je priemer grafu  $\overline{G}$ ?
- 4.4. Nech  $G_1$  je súvislý faktor grafu  $G_2$ . Musí byť graf  $G_2$  súvislý?
- 4.5. Majme graf  $K_4$  s označenými vrcholmi. Nájdite:
  - a) počet rôznych kružníc v grafe  $K_4$ ,
  - b) počet rôznych faktorov grafu  $K_4$ .

- 4.6. Zistite priemer, polomer a stred Petersenovho grafu.
- 4.6. Akým najmenším počtom ťahov sa dá nakresliť šachovnica?



# Kapitola 5

## Orientované grafy

### 5.1 Definícia digrafu

čitateľ si už určite všimol dôležitý rozdiel medzi grafmi z predchádzajúcej kapitoly a grafmi, ktorými sme znázorňovali binárne relácie, zobrazenia alebo čiastočne usporiadané množiny. V spomínaných grafoch sa vyskytovali šípky, ktoré reprezentovali usporiadané dvojice prvkov. V tejto kapitole sa budeme zaoberať práve týmito orientovanými grafmi, ktoré budeme skrátene nazývať *digrafmi*. Je to skratka z anglického názvu *directed graph*.

**Definícia 5.1.** *Nech  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  a nech  $H \subset (V \times V) \setminus \{\{v_1, v_1\}, \{v_2, v_2\}, \dots, \{v_n, v_n\}\}$ . Digraf  $\vec{G}$  je usporiadaná dvojica množín  $\vec{G} = (V, H)$ .*

Podobne ako pri neorientovaných grafoch,  $V$  je množina vrcholov a  $H$  je množina (orientovaných) hrán. Ak hrana  $h = (u, v) \in H$ , nazývame vrchol  $u$  **začiatočným** a vrchol  $v$  **koncovým** vrcholom orientovanej hrany  $h$ . Hrany  $h_1 = (u, v)$  a  $h_2 = (v, u)$  nazývame **opačne orientovanými** hranami. Pojmy incidencie a susednosti pre vrcholy aj hrany sa používajú v tom istom význame ako pri (neorientovaných) grafoch. Podobne v rovnakých významoch sa používajú aj pojmy ako podgraf (aj keď správne by sme mali hovoriť poddigraf) a faktor.

Definícia digrafu predpokladá orientáciu všetkých hrán. Je možné si však veľmi dobre predstaviť aj taký „graf“, v ktorom sú orientované iba niektoré hrany a ostatné sú neorientované (napríklad pri znázorňovaní dopravnej situácie v nejakom meste, kde sú jednosmerné aj obojsmerné ulice). My budeme v tomto texte uvažovať iba digrafy so všetkými orientovanými hranami.

Zrušením orientácie digrafu môžeme dostať graf alebo multigraf. Opačný prechod je jednoznačný – orientáciou hrán grafu vždy dostaneme digraf. Niekedy sa využíva tzv. **symetrická orientácia** grafu: Pre každú hranu  $h = \{u, v\}$  grafu  $G = (V, H)$  vytvoríme dve opačne orientované hrany  $h' = (u, v)$  a  $h'' = (v, u)$  v digrafe  $\vec{G} = (V, H')$ .

**Definícia 5.2.** Dva digrafy  $\vec{G}_1 = (V_1, H_1)$  a  $\vec{G}_2 = (V_2, H_2)$  sa nazývajú **izomorfné**, ak existuje bijektívne zobrazenie  $f : V_1 \rightarrow V_2$  také že pre všetky  $u, v \in V$ :

$$(u, v) \in H_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in H_2.$$

Zobrazenie  $f$  nazývame **izomorfizmom** digrafov  $\vec{G}_1$  a  $\vec{G}_2$ . Zapisujeme  $\vec{G}_1 \cong \vec{G}_2$ .

**Definícia 5.3.** Nech  $\vec{G} = (V, H)$  je digraf. Označme  $\delta^+(v)$ , resp  $\delta^-(v)$  počet hrán, ktorých vrchol  $v$  je začiatočným, resp. koncovým vrcholom. číslo  $\delta^+(v)$ , resp.  $\delta^-(v)$  nazývame **vonkajší**, resp. **vnútorný stupeň** vrcholu  $v$ .

Nech  $G = (V, H)$  vznikne z  $\vec{G} = (V, H)$  zrušením orientácie. Potom pre každý vrchol  $v \in V$  platí

$$\delta^+(v) + \delta^-(v) = \delta(v).$$

Dá sa dokázať, že pre vrcholy a hrany digrafu  $\vec{G} = (V, H)$  platí (pozri vetu 4.1)

$$\sum_{v \in V} \delta^+(v) = \sum_{v \in V} \delta^-(v) = |H|.$$

V mnohých prípadoch sa ukazuje výhodné zaviesť špeciálne názvy pre vrcholy digrafu  $\vec{G} = (V, H)$ . Nech  $v \in V$ , potom ak:

|                                            |                                      |
|--------------------------------------------|--------------------------------------|
| $\delta^+(v) = \delta^-(v)$ ,              | tak $v$ je <b>rovnovážny</b> vrchol, |
| $\delta^+(v) > 0, \quad \delta^-(v) = 0$ , | tak $v$ je <b>prameň</b> ,           |
| $\delta^+(v) = 0, \quad \delta^-(v) > 0$ , | tak $v$ je <b>ústie</b> ,            |
| $\delta^+(v) > \delta^-(v) > 0$ ,          | tak $v$ je <b>zosilňovač</b> ,       |
| $0 < \delta^+(v) < \delta^-(v)$ ,          | tak $v$ je <b>zoslabovač</b> .       |

## 5.2 Súvislosť a silná súvislosť

Možnosť prechodu od digrafu ku grafu prostredníctvom zrušenia orientácie hrán využijeme na definovanie nasledujúcich pojmov:

**Sled** v digrafe  $\vec{G}$  je postupnosť vrcholov a hrán v  $\vec{G}$ , ktorá po zrušení orientácie je sledom v  $G$ . Dĺžka sledu je počet jeho hrán.

**Spojenie** v  $\vec{G}$  je taký sled v  $\vec{G}$ , v ktorom je zachovaná orientácia hrán od začiatočného vrcholu ku koncovému.

**Orientovaný ťah** v  $\vec{G}$  je také spojenie v  $\vec{G}$ , ktoré po zrušení orientácie je ťahom v  $G$  (neopakujú sa hrany).

**Dráha** v  $\vec{G}$  je také spojenie v  $\vec{G}$ , ktoré po zrušení orientácie je cestou v  $G$  (neopakujú sa vrcholy). Dĺžka dráhy je rovná počtu jej hrán.

**Cyklus** v  $\vec{G}$  je uzavretá dráha. Počet jej vrcholov (hrán) je dĺžka cyklu.

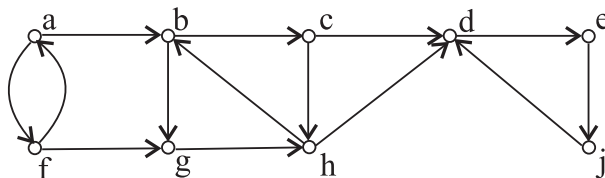
**Poznámka.** V digrafe  $\vec{G}$  môžeme tiež hovoriť o pojmoch ťah, cesta, kružnica. Sú to také sledy v digrafe  $\vec{G}$ , z ktorých po zrušení orientácie dostaneme ťah, cestu, kružnicu v grafe  $G$ . Nezáleží teda v nich na orientácii hrán.

Pozrime sa teraz na pojem súvislosti digrafu  $\vec{G}$ . Budeme rozlišovať dva druhy, a to: súvislosť a silnú súvislosť. Definícia súvislosti je totožná s definíciou súvislosti v (neorientovanom) grafe. Digraf je teda **súvislý**, ak medzi jeho ľubovoľnou dvojicou vrcholov existuje sled. Môžeme to vyjadriť aj takto: Digraf  $\vec{G}$  je súvislý, ak je súvislý graf  $G$ , ktorý vznikol zrušením orientácie v  $\vec{G}$ .

Nech  $\vec{G} = (V, H)$  je súvislý digraf. Pod **vzdialenosťou**  $\vec{d}(u, v)$  z vrcholu  $u$  do vrcholu  $v$  rozumíme dĺžku nminimálnej dráhy z  $u$  do  $v$ . Ak neexistuje dráha z  $u$  do  $v$ , tak  $\vec{d}(u, v) = \infty$ .

**Definícia 5.4.** Digraf  $\vec{G} = (V, H)$  je **silne súvislý**, ak pre ľubovoľné dva vrcholy  $u, v \in V$  existuje spojenie z  $u$  do  $v$  aj spojenie z  $v$  do  $u$ . **Silným komponentom** digrafu  $\vec{G}$  nazývame každý jeho maximálny silne súvislý poddigraf.

**Príklad 5.1.** Na obr. 5.1 je diagram digrafu, ktorý je súvislý, ale nie je silne súvislý. Neexistuje spojenie napríklad z vrcholu  $d$  do vrcholu  $b$ . Digraf obsahuje tri silné komponenty, a to:  $\vec{G}_1 = (V_1, H_1)$ ,  $\vec{G}_2 = (V_2, H_2)$  a  $\vec{G}_3 = (V_3, H_3)$ , pričom  $V_1 = \{a, f\}$ ,  $H_1 = \{(a, f), (f, a)\}$ ,  $V_2 = \{b, c, g, h\}$ ,  $H_2 = \{(b, c), (c, h), (h, b), (g, h), (b, g)\}$  a  $V_3 = \{d, e, j\}$  a  $H_3 = \{(d, e), (e, j), (j, d)\}$ . Ak by sme pridali k tomuto digrafu hranu so začiatočným vrcholom v množine  $V_3$  a koncovým v množine  $V_1$ , takt získaný digraf by bol silne súvislý.



Obr. 5.1

**Veta 5.1.** Pre digraf  $\vec{G} = (V, H)$  sú nasledujúce tri tvrdenia ekvivalentné:

- $\vec{G}$  je silne súvislý.
- $\vec{G}$  je súvislý a každá jeho hrana sa vyskytuje aspoň v jednom cykle.
- Pre ľubovoľný rozklad  $\{V_1, V_2\}$  vrcholovej množiny  $V$  existujú hrany  $h_1, h_2$  také, že  $h_1$  má začiatočný vrchol vo  $V_1$  a koncový vo  $V_2$  a  $h_2$  má začiatočný vrchol vo  $V_2$  a koncový vo  $V_1$ .

**Poznámka.** výraz, že tvrdenia a), b) a c) sú ekvivalentné znamená: a) platí práve vtedy, ak platí b), b) platí práve vtedy, ak platí c) a a) platí práve vtedy, ak platí c). Ak by sme chceli urobiť dôkaz vety, stačí nám dokazovať tri implikácie, a to: a)  $\Rightarrow$  b), b)  $\Rightarrow$  c) a c)  $\Rightarrow$  a).

Veta 5.2. Nech  $\vec{G} = (V, H)$  je súvislý digraf, v ktorom pre každý vrchol  $v \in V$  platí  $\delta^+(v) = 1$ . Potom  $\vec{G}$  obsahuje jediný cyklus.

Ak v Digrafe  $\vec{G}$  zmeníme orientáciu každej hrany na opačnú, získame **opačne orientovaný** digraf  $\vec{G}^-$ . Zrejme v  $\vec{G}^-$  sa oproti  $\vec{G}$  navzájom vymenia vonkajšie a vnútorné stupne všetkých vrcholov, všetky spojenia a cykly zmenia svoju orientáciu. Z toho vyplýva, že tvrdenie vety 5.2 bude platiť aj v prípade, že pre každý vrchol  $v \in V$  predpokladáme  $\delta^-(v) = 1$ .

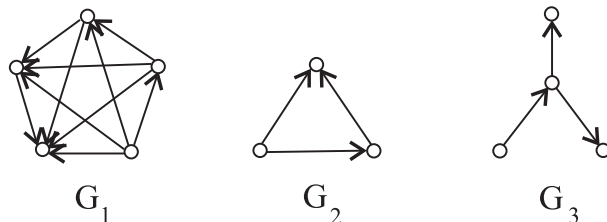
V predchádzajúcej kapitole sme sa zoznámili s eulerovskými a hamiltonovskými grafmi. Väčšina vlastností týchto grafov sa dá preformulovať aj pre digrafy. Digraf nazveme eulerovský, ak sa dá hranovo pokryť uzavretým orientovaným ťahom. Dá sa ukázať, že digraf je eulerovský práve vtedy, ak je súvislý a každý jeho vrchol je rovnovážny. Podobne môžeme hovoriť o hamiltonovských cykloch, sú to cykly, ktoré obsahujú všetky vrcholy digrafu. Digraf je hamiltonovský, ak obsahuje aspoň jeden hamiltonovský cyklus.

### 5.3 Acyklické digrafy

Z doteraz uvedených vlastností digrafov je vidieť, že cykly hrajú v digrafoch veľmi dôležitú úlohu. Ovpływujú silnú súvislosť, rozklad na silné komponenty a majú zásadný vplyv na možnosti vytvárania rôznych spojení s digrafe. Je napríklad zrejmé, že pri zisťovaní povahy všetkých možných výpočtov, ktoré môžu prebiehať podľa zadaného vývojového diagramu, bude situácia oveľa jednoduchšia, ak nepripustíme cykly. Teraz preberieme iba základné vlastnosti, ktoré budeme potrebovať pri aplikačnom využití digrafov.

**Definícia 5.5.** Digraf  $\vec{G} = (V, H)$ , ktorý neobsahuje cyklus, nazývame **acyklický digraf**.

Na obr. 5.2 sú diagramy troch acyklických digrafov  $\vec{G}_1$ ,  $\vec{G}_2$  a  $\vec{G}_3$ .



Obr. 5.2

Ak  $\vec{G} = (V, H)$  je acyklický digraf, je zrejmé, že aj každý jeho poddigraf je acyklický. Otázku existencie prameňa a ústia rieši nasledujúca veta.

**Veta 5.3.** *Nech  $\vec{G} = (V, H)$ , kde  $H \neq \emptyset$ , je konečný acyklický digraf. Potom v  $\vec{G}$  existuje aspoň jeden vrchol  $v \in V$ , pre ktorý je  $\delta^+(v) > 0$  a  $\delta^-(v) = 0$ .*

Nasledujúca veta je nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby digraf bol acyklický. Využíva sa napríklad pri označovaní vrcholov tzv. sieťových grafov, ktorými sa riešia veľké projekty pozostávajúce z mnohých rôzne navzájom súvisiacich úloh.

**Veta 5.4.** *Digraf  $\vec{G} = (V, H)$  je acyklickým digrafom práve vtedy, ak môžeme jeho vrcholy označiť číslami  $1, 2, \dots, |V|$  tak, že každá hrana  $(i, j)$  spĺňa podmienku  $i < j$ .*

Veta 5.3 nám vraví, že v každom konečnom acyklickom digrafe  $\vec{G}$  ktorý obsahuje aspoň jednu hranu, existuje aspoň jeden prameň. Vzhľadom na to, že opačne orientovaný digraf  $\vec{G}^{-}$  k acyklickému digrafu  $\vec{G}$  je tiež acyklický, môžeme tiež tvrdiť, že každý konečný digraf s aspoň jednou hranou obsahuje vrchol ktorý je ústím. Táto skutočnosť nám umožňuje zostaviť postup na zisťovanie, či daný digraf je acyklický. Stačí v danom digrafe nájsť nejaký prameň (alebo ústie) a vynechať hrany, ktoré sú s nim incidentné. Na vzniknutom digrafe tento postup opakujeme, až dospejeme ku grafu bez hrán (vrcholy zostávajú) alebo k digrafu, ktorý už nemá žiadny prameň ani ústie. V prvom prípade bol pôvodný digraf acyklický, v druhom obsahoval aspoň jeden cyklus. Z takto popísaného postupu je možné odvodiť aj spôsob orientácie hrán grafu  $G = (V, H)$ , ktorý zaručene povedie k acyklickému digrafu.

## 5.4 Úlohy

- 5.1. Koľko cyklov obsahuje digraf na obrázku 5.1?
- 5.2. Majme kružnicu dĺžky  $d$ ,  $d \geq 3$ . Koľko je možností zvoliť orientácie všetkých hrán tak, aby vznikol acyklický digraf?
- 5.3. Uvažujme konečný digraf, v ktorom platí  $\delta^+(v) \geq 1$  a  $\delta^-(v) \geq 1$  pre všetky jeho vrcholy. Je možné tvrdiť, že každý vrchol digrafu je obsiahnutý v nejakom cykle?
- 5.4. Existuje digraf s uzavretým spojením obsahujúcim každú hranu práve raz, ktorý nie je silne súvislý?
- 5.5 Aký musí byť graf, aby sa jeho hrany dali orientovať tak, že vznikne silne súvislý digraf?
- 5.6. Nech pre každý vrchol  $v$  súvislého digrafu  $\vec{G} = (V, H)$  je  $\delta^+(v) = 1$ . Aký je maximálny a aký je minimálny počet cyklov v  $\vec{G}$ ?

- 5.7. Nech  $\vec{G}$  je konečný, súvislý, acyklický digraf s jediným ústím  $q$  a jediným prameňom  $p$ . Zostrojme digraf  $\vec{G}'$  tak, že ku  $\vec{G}$  pridáme hranu  $(q, p)$ . Dokážte, že  $\vec{G}'$  je silne súvislý.
- 5.8. Ukážte, že ak  $\vec{G} = (V, H)$  je silne súvislý digraf s aspoň dvoma vrcholmi, tak  $|H| \geq |V|$ .
- 5.9. Ukážte, že je možné na hranách trojrozmiernej kocky zvoliť orientácie tak, že vznikne silne súvislý digraf, ktorý neobsahuje hamiltonovský cyklus.

# Kapitola 6

## Grafy a matice

### 6.1 Maticové reprezentácie grafov

Doteraz sme štruktúru grafov v uvažovaných príkladoch vyjadrovali geometrickým modelom – diagramom. Vhodne zvolený diagram poskytuje na prvý pohľad veľa cenných informácií o samotnom grafe, avšak nešikovne nakreslený diagram nás môže zvädzať k nesprávnym záverom, najmä ak ide o izomorfné grafy. Pri počítačovom spracovaní úloh riešených pomocou grafov je reprezentácia grafu diagramom veľmi nevýhodná. V tomto prípade je vhodné zvoliť diskretný (presnejšie číslicový) popis grafu a na tento účel nám výhodne poslúžia matice.

**Definícia 6.1.** *Nech  $G = (V, H)$  je graf,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  a  $H = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ . Maticou incidencie grafu  $G$  nazývame maticu  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  typu  $(n, m)$ , ak pre jej prvky platí*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak hrana } h_j \text{ je incidentná s vrcholom } v_i, \\ 0, & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

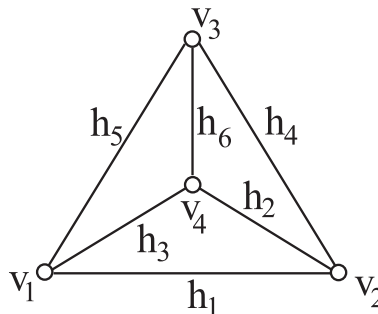
Počet riadkov matice  $\mathbf{A}$  je rovný počtu vrcholov grafu  $G$  a počet stĺpcov odpovedá počtu hrán grafu  $G$ . Každý stĺpec matice  $\mathbf{A}$  obsahuje práve dve jedničky, pretože každá hrana grafu  $G$  inciduje práve s dvoma vrcholmi. Riadok odpovedajúci  $i$ -tému vrcholu  $v_i$  obsahuje práve  $\delta(v_i)$  jedničiek, čo odpovedá počtu hrán incidentných s vrcholom  $v_i$ . Tvar matice je určený poradím, v akom sme očíslovali vrcholy a hrany grafu, je teda závislý na označení prvkov vrcholovej a hranovej množiny daného grafu. Zmena očíslovania prvkov aspoň jednej z týchto množín má za následok permutáciu riadkov, resp. stĺpcov (prípadne aj riadkov aj stĺpcov) matice incidencie. Z toho vyplýva kritérium pre izomorfizmus dvoch grafov.

**Veta 6.1.** *Dva grafy sú izomorfné práve vtedy, ak ich matice incidencie sa sto-tožnia po konečnom počte permutácií riadkov a stĺpcov jednej z nich.*

Toto kritérium sa v praxi osvedčuje iba s dodatočnými obmedzeniami, pretože pri veľkých grafoch by bolo potrebné preverovať všetkých  $m!n!$  permutácií  $n$  riadkov a  $m$  stĺpcov.

Príklad 6.1. Matica incidencie  $\mathbf{A}$  grafu, ktorého diagram je na obr. 6.1 má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Obr. 6.1

V matici incidencie sme uvažovali vrcholy aj hrany grafu a ich vzájomnú incidenciu. Vo všeobecnosti to bude obdĺžniková matica. V matici, ktorú teraz budeme definovať, uvažujeme iba vrcholy a existenciu hrany medzi dvoma vrcholmi. Operácie uskutočňované s týmito maticami nám dokážu povedať o grafoch oveľa viac.

**Definícia 6.2.** *Nech  $G = (V, H)$  je graf s vrcholovou množinou  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Matica susednosti grafu  $G$  je štvorcová matica  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  rádu  $n$ , ak pre jej prvky platí*

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak } \{v_i, v_j\} \in H, \\ 0, & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

Napríklad pre graf, ktorého diagram je na obr. 6.1 máme

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pretože  $\{v_i, v_j\} = \{v_j, v_i\}$ , je matica  $\mathbf{B}$  symetrická. Na jej hlavnej diagonále sú nuly, pretože v  $G$  neexistujú slučky. Pri zisťovaní izomorfizmu dvoch grafov pomocou matíc susednosti musíme v týchto maticiach uvažovať rovnaké permutácie množiny ich riadkov aj stĺpcov, takže celkový počet možností je  $n!$ .

Matice susednosti sa dajú výhodne využiť pri overovaní súvislosti grafov ako aj pri určovaní vzdialenosti v danom grafe. K tomu potrebujeme zaviesť špeciálne násobenie matíc, ktorých prvky sú iba nuly a jednotky. Nech  $\mathbf{B}$  je matica susednosti grafu  $G = (V, H)$ ,  $|V| = n$ . Označme  $\mathbf{B}^{(1)}$  maticu, ktorú dostaneme z matice

$\mathbf{B}$  pridaním jednotiek na hlavnú diagonálu. Uvažujme maticu  $\mathbf{B}^{(2)} = (b_{ij}^{(2)})$  takú, že  $\mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{B}^{(1)}$ . Z násobenia matíc je zrejmé, že

$$b_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n b_{ik}^{(1)} \cdot b_{kj}^{(1)},$$

pričom ale v tomto súčine matíc budeme používať tzv. boolovské sčítavanie a násobenie ( $1 \cdot 1 = 1$ ,  $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$ ,  $1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1$ ,  $0 + 0 = 0$ ). Všeobecne môžeme uvažovať maticu

$$\mathbf{B}^{(m)} = \mathbf{B}^{(m-1)} \cdot \mathbf{B}^{(1)}.$$

**Veta 6.2.** *Majme maticu susednosti  $\mathbf{B}$  súvislého grafu  $G = (V, H)$ ,  $|V| = n$ . Potom pre ľubovoľné  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , je prvok  $b_{ij}^{(k)}$  matice  $\mathbf{B}^{(k)}$  rovný jednej práve vtedy, ak  $d(v_i, v_j) \leq k$ .*

**Dôsledok 6.1.** *Graf  $G = (V, H)$ ,  $|V| = n$ , je súvislý práve vtedy, keď prvky matice  $\mathbf{B}^{(n-1)}$  sú iba jednotky.*

**Dôsledok 6.2.** *Pre každé dva rôzne vrcholy grafu  $G = (V, H)$  platí*

$$d(v_i, v_j) = \min\{k; b_{ij}^{(k)} = 1\}.$$

Nakoniec uvedieme vetu, ktorá dáva do vzťahu maticu incidencie a maticu súvislosti daného grafu.

**Veta 6.3.** *Nech  $\mathbf{A}$  je matica incidencie,  $\mathbf{A}^T$  je k nej transponovaná matica a  $\mathbf{B}$  je matica susednosti grafu  $G = (V, H)$ . Nech  $\mathbf{D} = (d_{ij})$  je diagonálna matica s prvkami  $d_{ii} = \delta(v_i)$ . Potom*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

**Príklad 6.2.** Nájdite všetky dvojice vrcholov, ktorých vzdialenosť je presne 3 a všetky dvojice vrcholov, ktorých vzdialenosť je viac ako 3 v grafe zadanom maticou susednosti

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Riešenie.** Pridaním jednotiek na hlavnú diagonálu dostaneme maticu  $\mathbf{B}^{(1)}$ . Maticu  $\mathbf{B}^{(2)}$  získame násobením  $\mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{B}^{(1)}$  a maticu  $\mathbf{B}^{(3)}$  násobením  $\mathbf{B}^{(2)} \cdot \mathbf{B}^{(1)}$ . Postupne

teda dostávame:

$$\mathbf{B}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vzhľadom na symetrickosť matíc podľa hlavnej diagonály si budeme všímať iba prvky nad diagonálou. V matici  $\mathbf{B}^{(3)}$  je iba jedna nula v prvom riadku a treťom stĺpci, čo podľa dôsledku 6.2 znamená, že vzdialenosť vrcholov  $v_1$  a  $v_3$  je viac ako 3. V matici  $\mathbf{B}^{(2)}$  sú rovné nule aj prvky  $b_{1,5}^{(2)}$ ,  $b_{1,6}^{(2)}$  a  $b_{3,4}^{(2)}$ , pričom v  $\mathbf{B}^{(3)}$  sú rovné jednej. To podľa dôsledku 6.2 znamená, že  $d(v_1, v_5) = d(v_1, v_6) = d(v_3, v_4) = 3$ .

Aj pri digrafoch, podobne ako pri grafoch, patria matice k základným prostriedkom ich vyjadrenia, hlavne pri strojovom spracovaní.

**Definícia 6.3.** *Nech  $\vec{G} = (V, H)$  je digraf,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $H = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ . Maticou incidencie digrafu  $\vec{G}$  nazývame maticu  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  typu  $(n, m)$ , ak pre jej prvky platí*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak } h_j = (v_i, v_k) \text{ pre nejaké } v_k \in V, \\ -1, & \text{ak } h_j = (v_k, v_i) \text{ pre nejaké } v_k \in V, \\ 0, & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

Uvedieme základné vlastnosti matice  $\mathbf{A}$ :

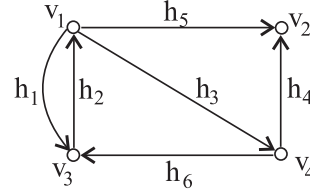
- a) v každom stĺpci sa čísla 1 a  $-1$  vyskytujú práve raz, ostatné prvky sú nuly,
- b) počet jednotiek v  $i$ -tom riadku je rovný  $\delta^+(v_i)$ ,
- c) počet čísel  $-1$  v  $i$ -tom riadku je rovný  $\delta^-(v_i)$ .

Z matice incidencie  $\mathbf{A}$  digrafu  $\vec{G}$  ľahko dostaneme maticu incidencie grafu  $G$ , ktorý vznikne zrušením orientácie, a to tak, že namiesto  $a_{ij}$  zoberieme  $|a_{ij}|$ .

**Definícia 6.4.** Nech  $\vec{G} = (V, H)$  je digraf s vrcholovou množinou  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . **Matica susednosti** digrafu  $\vec{G}$  je štvorcová matica  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  rádu  $n$ , ak pre jej prvky platí

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak } (v_i, v_j) \in H, \\ 0, & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

**Veta 6.4.** Nech  $\mathbf{B}$  je matica susednosti digrafu  $\vec{G} = (V, H)$ . Potom pre každé  $n \in \mathbb{N}$  prvok  $b_{ij}^{(n)}$  matice  $\mathbf{B}^n$  udáva počet spojení dĺžky  $n$  z vrcholu  $v_i$  do vrcholu  $v_j$ .



Obr. 6.2

Pre maticu incidencie  $\mathbf{A}$  a maticu susednosti  $\mathbf{B}$  digrafu, ktorého diagram je na obr. 6.2 máme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 6.2 Úlohy

6.1. Bez kreslenia diagramu zistite, či matice

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sú maticami incidencie toho istého grafu.

6.2. Zistite, či graf  $G$  je súvislý, ak jeho matica susednosti je

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 6.3. Zistite všetky dvojice vrcholov  $v_i, v_j$ , ktorých vzdialenosť je väčšia ako 3, ak graf je zadáný maticou susednosti

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 6.4. Zistite, či je graf  $G$  súvislý, ak je zadáný maticou susednosti

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 6.5. Napíšte maticu susednosti digrafu, ktorého diagram je na obr. 5.1.
- 6.6. Ako sa môžeme pomocou maticovej reprezentácie presvedčiť, či digraf je alebo nie je silne súvislý?

# Kapitola 7

## Stromy

### 7.1 Stromy a ich vlastnosti

**Definícia 7.1.** *Strom je neprázdny súvislý graf, ktorý neobsahuje kružnice. Les je graf, ktorého komponenty sú stromy.*

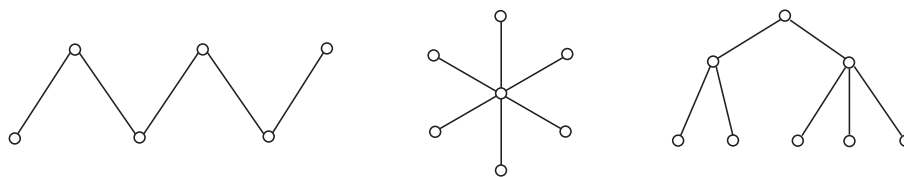
Z aplikačného hľadiska patria stromy k najpopulárnejším pojmom teórie grafov. So stromami sa stretávame pri vyjadrovaní štruktúrnych vlastností rôznych systémov. Poznáme napríklad *genealogické stromy*, ktoré zachytávajú rozvetvenie potomstva vo významných rodoch, stromom môžeme vyjadriť priebeh vyraďovacieho (napríklad tenisového) turnaja, rozhodovacím stromom sa dajú veľmi prehľadne zachytiť všetky možné odpovede na nejakú skupinu otázok s dopredu vymedzenými voľbami odpovedí na jednotlivé otázky, pomocou stromov vyjadrujeme štruktúrne vzorce v chémii a podobne. V programovaní sú stromy považované za veľmi dôležitý druh dátových štruktúr a môžu byť využité napríklad pri preklade z programovacích jazykov (*syntaktické stromy*), pri operáciách zoradovania súborov dát, pri realizácii tabuliek údajov s potrebou veľmi rýchlej lokalizácie jednotlivých položiek (*vyhľadávacie stromy*).

Na označenie stromov, ako špeciálnych grafov, budeme používať označenie  $T = (V, H)$ . Písmeno  $T$  je z anglickej terminológie, a to zo slova *tree*.

Dá sa dokázať, že každý súvislý podgraf stromu je tiež strom. Takejto vlastnosti, ktorá sa prenáša na všetky podgrafy, hovoríme *dedičná vlastnosť*.

**Veta 7.1.** *Nech  $T = (V, H)$  je strom a  $|H| \geq 1$ . Potom v  $T$  existujú aspoň dva rôzne vrcholy, ktoré majú stupeň rovný číslu 1.*

Na obr. 7.1 sú diagramy troch stromov. Prvý z nich má práve dva vrcholy stupňa 1 a všetky ostatné vrcholy majú stupeň 2. Taký strom sa nazýva **had**. Druhý zo stromov je **hviezda**. Hviezda je strom, ktorý má práve jeden vrchol stupňa aspoň 3 a všetky ostatné vrcholy majú stupeň 1. Tretí zo stromov na obr. 7.1 je typ rozhodovacieho stromu (prípadne genealogického stromu).



Obr. 7.1

Nasledujúce vety nám popisujú niektoré zo základných vlastností stromov.

**Veta 7.2.** *Nech  $T = (V, H)$  je strom. Potom*

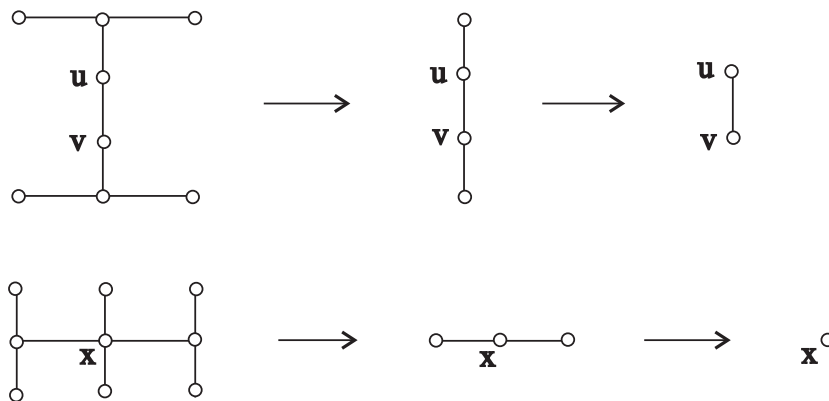
$$|H| = |V| - 1.$$

**Veta 7.3.** *Graf  $G = (V, H)$  je stromom práve vtedy, ak medzi každou dvojicou jeho vrcholov existuje práve jedna cesta.*

V definícii 4.8 sme zaviedli pojem priemer  $P(G)$ , polomer  $r(G)$  a stred grafu  $G = (V, H)$ . Stromy majú špeciálne vlastnosti vzhľadom na priemer, polomer a stred grafu.

**Veta 7.4.** *Nech  $T = (V, H)$  je strom. Ak jeho priemer je číslo párne, tak stredom stromu je jediný vrchol a  $P(T) = 2r(T)$ . Ak jeho priemer je číslo nepárne, tak stredom sú dva susedné vrcholy a  $P(T) = 2r(T) - 1$ .*

Stručne si opíšeme, ako hľadať stred (priemer, polomer) v danom grafe. Ak máme daný strom, tak z neho vynecháme všetky vrcholy stupňa 1 (aj s hranami, ktoré s nimi incidujú). Dostaneme opäť strom a proces opakujeme. Nakoniec dostaneme jedinou hranu – stred pozostáva z dvoch vrcholov, alebo dostaneme jediný vrchol, ktorý je stredom. Ak stredom je jeden vrchol, polomer je rovný počtu iterácií (koľkokrát sme vykonali proces odoberania vrcholov stupňa 1). Ak stred pozostáva z dvoch vrcholov, polomer je o jednotku väčší ako počet iterácií. Na obr. 7.2 je znázornený uvedený postup na dvoch stromoch.

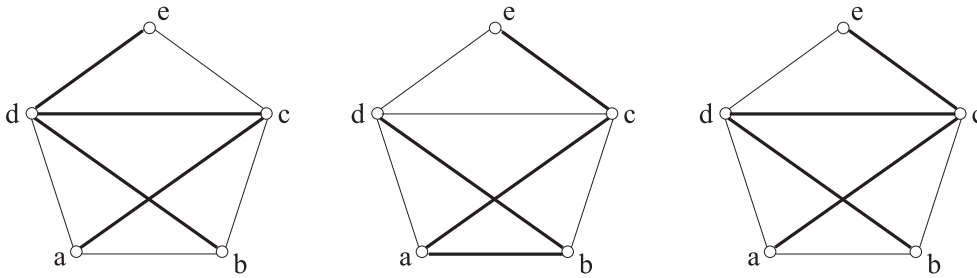


Obr. 7.2

## 7.2 Kostry a kružnice

**Definícia 7.2.** *Kostra grafu  $G = (V, H)$  je taký jeho faktor, ktorý je stromom.*

Keď si uvedomíme význam slov faktor a strom, tak môžeme kostru charakterizovať aj ako súvislý podgraf daného grafu, ktorý obsahuje všetky jeho vrcholy a neobsahuje kružnicu. Je zrejmé, že v grafe  $G$  existuje kostra práve vtedy, ak je graf  $G$  súvislý. Ak je graf  $G$  strom, potom v ňom existuje jediná kostra, ktorou je práve graf  $G$ . Na obr. 7.3 sú hrubými čiarami vyznačené tri rôzne kostry toho istého grafu. Je vidieť, že graf môže mať viac kostier. K určeniu počtu rôznych kostier grafu sa vrátíme neskôr.



Obr. 7.3

**Veta 7.5.** *Nech  $G = (V, H)$  je súvislý graf a  $T$  je jeho podgraf v  $|V| - 1$  hranami neobsahujúci kružnice. Potom  $T$  je kostra grafu  $G$ .*

Ak sa zamyslíme nad tvrdením vety 7.5 a definíciou stromu, tak zistíme, že ľubovoľné tri z nasledujúcich štyroch vlastností implikujú štvrtú vlastnosť:

- (a)  $T$  je súvislý graf,
- (b)  $T$  neobsahuje kružnice,
- (c)  $T$  má  $|V| = n$  vrcholov,
- (d)  $T$  má  $n - 1$  hrán.

Napríklad: Nech  $T$  je súvislý graf neobsahujúci kružnice a má  $n$  vrcholov, potom  $T$  má  $n - 1$  hrán.

Cayley v roku 1889 dokázal, že počet všetkých rôznych kostier (všimnite si, že 1. a 3. kostra na obr. 7.3 sú rôzne) kompletného grafu  $K_n$  pre  $n \geq 2$  je rovný číslu  $n^{n-2}$ . Teraz si uvedieme, ako je možné určiť počet rôznych kostier grafu pomocou vhodného determinantu.

Nech  $G = (V, H)$ ,  $|V| = n$ , je súvislý graf. Nech  $\mathbf{B}$  je matica susednosti a  $\mathbf{D}$  je diagonálna matica s prvkami  $d_{ii} = \delta(v_i)$  grafu  $G$ . Označme  $\mathbf{D}_i - \mathbf{B}_i$  maticu rádu  $n - 1$ , ktorú sme vytvorili z matice  $\mathbf{D} - \mathbf{B}$  vynechaním  $i$ -tého riadku a  $i$ -tého stĺpca pre ľubovoľné  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Potom pre počet  $p(T)$  všetkých rôznych kostier grafu  $G$  platí

$$p(T) = \det(\mathbf{D}_i - \mathbf{B}_i).$$

**Príklad 7.1.** Vypočítajte počet rôznych kostier grafu, ktorého diagram je na obr. 7.3.

**Riešenie.** Najprv napíšeme matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vzhľadom na výpočet determinantu pomocou rozvoja podľa riadku alebo stĺpca je výhodné vynechať  $i$ -tý riadok a  $i$ -tý stĺpec tak, aby v matici ostalo čo najviac núl (nie je to však nutné). Pre  $i = 3$  v našom prípade dostávame

$$\mathbf{D}_i - \mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a  $\det(\mathbf{D}_i - \mathbf{B}_i) = 40$ . Je vidieť, že aj v prípade malého grafu je počet kostier dosť veľký.

**Definícia 7.3.** *Nech  $T = (V, H)$  je strom. Ak každej hrane stromu  $T$  priradíme práve jednu z dvoch možných orientácií, tak dostaneme **orientovaný strom**  $\vec{T}$ .*

Je zrejmé, že k stromu  $T = (V, H)$  môžeme zostrojiť práve  $2^{|H|}$  orientovaných stromov  $\vec{T}$  (niektoré z nich budú navzájom izomorfné).

**Definícia 7.4.** *Nech  $\vec{T}_v$  je orientovaný strom s aspoň dvoma vrcholmi, v ktorom z vrcholu  $v$  existuje dráha do všetkých ostatných vrcholov. Potom  $\vec{T}_v$  nazývame **koreňový strom** a vrchol  $v$  je **koreňom stromu**.*

**Poznámka.** V terminológii digrafov koreň stromu je vlastne (jediným) prameňom digrafu, ktorý je koreňovým stromom. Vrcholom, ktoré v digrafe nazývame ústia,

budeme v koreňových stromoch hovoriť **listy** (názornejšie to odpovedá predstave stromu).

V niektorých prípadoch je výhodné uvažovať ku koreňovému stromu  $\vec{T}_v$  opačne orientovaný strom  $\overleftarrow{T}_v$  (všetky hrany sú opačne orientované).

Nakolko v koreňovom strome môže medzi dvoma rôznymi vrcholmi existovať najviac jedna dráha, orientácia každej hrany v koreňovom strome je jednoznačne určená výberom koreňa. Koreňový strom  $\vec{T}_v$  môžeme potom v rovine reprezentovať aj diagramom neorientovaného stromu  $T_v$ , pričom koreň stromu  $v$  umiestnime najvyššie.

**Definícia 7.5.** *Nech  $\vec{G}$  je digraf, ktorý vznikol orientáciou grafu (multigrafu)  $G$ . Nech  $K$  je kostra grafu (multigrafu)  $G$ . Potom digraf  $\vec{K}$ , ktorý vznikol z  $K$  rovnakou orientáciou hrán, sa nazýva **orientovanou kostrou** digrafu  $\vec{G}$ . Kostra súvislého digrafu  $\vec{G}$ , ktorá je koreňovým stromom, sa nazýva **koreňová kostra** digrafu  $\vec{G}$ .*

Ak po zrušení orientácie všetkých hrán v digrafe  $\vec{G} = (V, H)$  získame graf, tak počet rôznych orientovaných kostier digrafu  $\vec{G}$  je rovný počtu rôznych kostier v grafe  $G$ . Iná situácia je, ak v digrafe  $\vec{G}$  sú opačne orientované hrany a po zrušení orientácie získame multigraf.

Nech  $\vec{G} = (V, H)$ ,  $|V| = n$ , je súvislý digraf. Nech  $\mathbf{A}$  je jeho matica incidencie. Potom pre počet  $p(\vec{T})$  všetkých rôznych orientovaných kostier digrafu  $\vec{G}$  platí

$$p(\vec{T}) = \det((\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)_i)$$

pre ľubovoľné  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , pričom  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)_i$  je matica utvorená z matice  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$  vynechaním  $i$ -tého riadku a  $i$ -tého stĺpca.

**Príklad 7.2.** Vypočítajte počet všetkých rôznych kostier digrafu  $\vec{G}$ , ktorého diagram je na obr. 6.2.

**Riešenie.** K matici incidencie digrafu  $\vec{G}$  uverejnenej v kapitole 6 urobíme transponovanú maticu a vypočítame súčin  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ . Potom pre  $i = 1$  (alebo ľubovoľné iné) dostávame:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a

$$\det((\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)_i) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 13.$$

Nakoniec sa pozrieme na spôsob určovania počtu  $p(\overrightarrow{T_{v_s}})$  všetkých rôznych koreňových kostier digrafu  $\overrightarrow{G} = (V, H)$  s koreňom vo vrchole  $v_s$ . Na tento účel vytvoríme maticu  $\mathbf{K} = (k_{ij})$  rádu  $|V|$  digrafu  $\overrightarrow{G}$ , kde

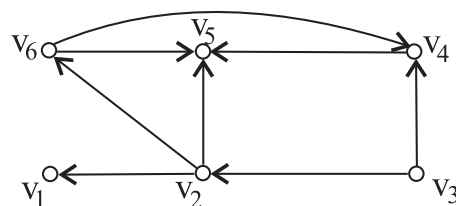
$$\begin{aligned} k_{ii} &= \delta^-(v_i), & \text{pre } i = 1, 2, \dots, |V|, \\ k_{ij} &= -b_{ij}, & \text{pre } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, |V|, \end{aligned}$$

príčom  $b_{ij}$  sú prvky matice susednosti  $\mathbf{B}$  digrafu  $\overrightarrow{G}$ . Utvorme maticu  $\mathbf{K}_s$  vynechaním  $s$ -tého riadku a  $s$ -tého stĺpca matice  $\mathbf{K}$ . Potom platí

$$p(\overrightarrow{T_{v_s}}) = \det \mathbf{K}_s.$$

**Príklad 7.3.** Majme digraf  $\overrightarrow{G}$ , ktorého diagram je na obr. 7.4. Zistite počet  $p(\overrightarrow{T_{v_3}})$  jeho koreňových kostier s koreňom vo vrchole  $v_3$ .

**Riešenie.** Určíme matice  $\mathbf{K}$  a  $\mathbf{K}_3$  takto:



Obr. 7.4

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom  $p(\overrightarrow{T_{v_3}}) = \det \mathbf{K}_3 = 6$ .

## 7.3 Úlohy

- 7.1. Je možné, aby v súvislom (konečnom) grafe existovali dve rôzne kostry, ktoré nemajú spoločnú hranu?
- 7.2. Nájdite všetky neizomorfné stromy s nie viac ako 5 hranami.
- 7.3. Koľko hrán treba odstrániť z Petersenovho grafu, aby vznikla kostra?

- 7.4. Vypočítajte počet rôznych kostier grafu, ktorý vznikne zrušením orientácií hrán digrafu na obrázku 7.4.
- 7.5. V digrafe, ktorého diagram je na obrázku 5.1 vypočítajte:
- a) počet rôznych orientovaných kostier,
  - b) počet rôznych koreňových kostier s koreňom vo vrchole  $b$ ,
  - c) počet rôznych koreňových kostier s koreňom vo vrchole  $a$ .



# Kapitola 8

## Aplikácie grafov a digrafov

### 8.1 Minimálne cesty a spojenia

V tejto kapitole uvedieme niektoré typické úlohy z praxe, pri riešení ktorých sa významne využíva teória grafov. Zároveň v niektorých prípadoch uvedieme aj známe algoritmy na ich riešenie alebo aspoň vhodné heuristické postupy. Algoritmy budeme považovať za *rýchly*, ak je možné počet krokov, ktoré algoritmus pri výpočte vykoná, ohraničiť konštantným násobkom polynomiálnej funkcie. Ak je algoritmus rýchly, tak so zväčšovaním vstupu algoritmu je nárast času na jeho úspešné ukončenie „zvládnuteľný“ rýchlejším počítačom. V opačnom prípade hovoríme, že algoritmus nie je efektívny. Záujemcov o presnejšiu charakteristiku rýchlosti práce algoritmov odkazujeme na knihy: J. Plesník, *Grafové algoritmy*, resp. L. Kučera, *Kombinatorické algoritmy* zo zoznamu literatúry v závere.

Jednou zo základných úloh v teórii grafov je nájsť najkratšiu cestu medzi dvoma vrcholmi grafu. Taká požiadavka sa vyskytuje v mnohých praktických aplikáciách (napríklad pri hľadaní najkratšieho dopravného spojenia). V takých grafoch sa hrany označujú číslami, ktorých význam je rôzny a záleží od toho, aká úloha sa daným grafom rieši.

Majme graf  $G = (V, H)$ ,  $|V| = n$ . Nech  $\mathbb{R}^+$  je množina kladných reálnych čísel. Zobrazenie  $f : H \rightarrow \mathbb{R}^+$  nazývame **hranovým ohodnotením** grafu  $G$ . Pre každú hranu  $\{v_i, v_j\} \in H$  číslo  $w_{ij} = f(\{v_i, v_j\}) \in \mathbb{R}^+$  nazývame **ohodnotením hrany**  $\{v_i, v_j\}$ .

Podobne definujeme hranové ohodnotenie aj pre digrafy, iba namiesto neorientovaných hrán  $\{v_i, v_j\}$  uvažujeme orientované hrany  $(v_i, v_j)$ .

#### 8.1.1 Dĺžka minimálnej cesty

Predstavme si, že súvislý hranovo ohodnotený graf predstavuje nejakú cestnú sieť, v ktorej vrcholy odpovedajú mestám a križovatkám a hodnoty hrán odpovedajú vzdialenostiam medzi bodmi reprezentovanými vrcholmi. V závislosti od typu

úlohy ohodnotenia hrán môžu predstavovať aj čas alebo náklady na prepravu z jedného miesta na druhé. V takom grafe chceme nájsť najvýhodnejšie „spojenia“.

Nech  $S$  je cesta z vrcholu  $v_i$  do vrcholu  $v_j$  v ohodnotenom grafe  $G$ . Súčet ohodnotení hrán cesty  $S$  nazveme **dĺžkou cesty**  $S$ . Pre dva vrcholy  $v_i$  a  $v_j$  potom minimálnu z dĺžok ciest medzi  $v_i$  a  $v_j$  nazveme **dĺžkou minimálnej cesty** a označíme symbolom  $d_w(v_i, v_j)$ .

Pri riešení úloh súvisiacich so vzdialenosťou sa najčastejšie stretávame s nasledujúcimi variantmi:

1. pre dané dva vrcholy  $u, v$  ohodnoteného grafu určiť vzdialenosť medzi  $u$  a  $v$ ,
2. pre daný vrchol  $u$  určiť vzdialenosti z  $u$  do každého vrcholu ohodnoteného grafu,
3. určiť vzdialenosti medzi všetkými dvojicami vrcholov ohodnoteného grafu.

Vzhľadom na to, že úloha číslo 1 je obsiahnutá v 2. a 3. úlohe, obmedzíme sa na algoritmické riešenia 2. a 3. úlohy. Pre tento prípad (neorientovaný graf) uvedieme **Dijkstrov algoritmus**, ktorý rieši 2. úlohu. Riešenie 3. úlohy si ukážeme neskôr pre digraf.

Vstupom Dijkstrovho algoritmu je hranovo ohodnotený graf  $G = (V, H)$  a začiatkový vrchol  $a$ , od ktorého sa určuje dĺžka minimálnej cesty (vzdialenosť)  $d_w(a, v)$  k vrcholu  $v$  pre všetky  $v \in V$ . Pre každý vrchol  $v \in V$  sa zavádza premenná  $L(v)$ . Je to číslo, ktoré udáva momentálny „odhad“ dĺžky minimálnej cesty z  $a$  do  $v$ . Presnejšie, v každom momente je  $d_w(a, v) \leq L(v)$ , čo znamená, že v priebehu práce algoritmu sa pre niektoré vrcholy môže  $L(v)$  znižovať, pre iné sa hodnota  $L(v)$  už stáva pevnou a vtedy je presne rovná  $d_w(a, v)$ . Algoritmus pracuje ešte s premennou  $A$ , čo je množina „aktívnych“ vrcholov, teda vrcholov s premennou hodnotou  $L(v)$ . Na začiatku je  $A = V$ .

V hlavnom kroku algoritmu vyberieme z množiny vrcholov s pevnými hodnotami  $L$  vrchol  $v$ , ktorý má hodnotu  $L(v)$  minimálnu, t.j. do ktorého je z vrcholu  $a$  najkratšia vzdialenosť zo všetkých už známych vzdialeností. Potom zisťujeme, či sa cez tento vrchol  $v$  môžu skrátiť doteraz známe nie pevné vzdialenosti do jeho susedov (vrcholov s ešte nie pevnou hodnotou  $L(x)$ ) cez hrany, ktoré ich spájajú. Ak áno, príslušné vrcholy dostanú menšiu hodnotu  $L(x)$ .

### Algoritmus určenia minimálnej cesty (Dijkstra)

*Vstup:* Hranovo ohodnotený graf  $G = (V, H)$ , počiatkový vrchol  $a$ .

*Výstup:*  $L(x) = d_w(a, x)$  pre každý vrchol  $x \in V$ .

1. Polož  $L(a) := 0$ ;  $L(x) := \infty$  pre každé  $x \in V \setminus \{a\}$ ;  $A := V$ .
2. Ak  $A = \emptyset$ , STOP.
3. Polož  $v := \{y \in A; L(y) \leq L(z), z \in A\}$  (ak je viac možností, zvol ľubovoľnú).  
Polož  $A := A \setminus \{v\}$ .

4. Pre všetky  $x \in A$  také, že  $\{v, x\} \in H$  polož  
 $L(x) := \min\{L(x), L(v) + f(\{v, x\})\}$ .  
 Skok na krok 2.

**Poznámka.** Pri praktickom programovaní nahradíme symbol  $\infty$  nejakou veľkou hodnotou, o ktorej máme zaručené, že bude väčšia ako dĺžka maximálnej cesty v  $G$ , napr.  $M = 10^5 + \sum_{\{u,v\} \in H} f(\{u, v\})$ .

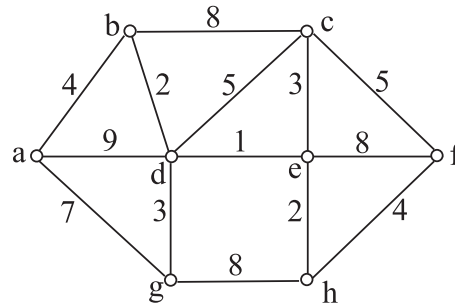
Poznamenajme ešte, že algoritmus môžeme (len nahradením neorientovaných hrán  $\{u, v\}$  orientovanými  $(u, v)$ ) použiť aj pre digrafy.

Požiadavka, že ohodnotenia všetkých hrán sú kladné, je veľmi dôležitá. Pre úlohu hľadania dĺžky minimálnej cesty v grafe, kde niektoré hrany môžu mať aj záporné ohodnotenia (za ich pridanie do cesty dostaneme „prémiu“), nie je známy žiadny efektívny algoritmus, a asi ani žiadny neexistuje.

**Príklad 8.1.** Zistite dĺžky minimálnych ciest z vrcholu  $a$  do všetkých vrcholov ohodnoteného grafu, ktorého diagram je na obr. 8.1.

**Riešenie.** Získané hodnoty  $L(x)$  pri jednotlivých prechodoch cyklami (2–3–4) algoritmu sú zapísané v nasledujúcej tabuľke. Podčiarknuté hodnoty sú pri vrchoch, ktoré sme v 3. kroku zvolili za vrchol  $v$ . Sú to vlastne definitívne hodnoty  $L(v) = d_w(a, v)$  pre všetky  $v \in V$ .

**Poznámka.** Nájsť konkrétnu postupnosť vrcholov a hrán cesty s minimálnou dĺžkou z vrcholu  $a$  do zvoleného vrcholu je možné „spätným“ chodom, na ktorý je práve tabuľkový zápis priebehu výpočtu veľmi výhodný. Doporučujeme čitateľovi premyslieť si tento postup. Ide pritom vždy o nájdenie predchádzajúceho vrcholu minimálnej cesty, ak postupujeme od jej konca.



Obr. 8.1

| $a$      | $b$      | $c$       | $d$      | $e$      | $f$       | $g$      | $h$      |
|----------|----------|-----------|----------|----------|-----------|----------|----------|
| <u>0</u> | $\infty$ | $\infty$  | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$  | $\infty$ | $\infty$ |
|          | <u>4</u> | $\infty$  | 9        | $\infty$ | $\infty$  | 7        | $\infty$ |
|          |          | 12        | <u>6</u> | $\infty$ | $\infty$  | 7        | $\infty$ |
|          |          | 11        |          | 7        | $\infty$  | <u>7</u> | $\infty$ |
|          |          | 11        |          | <u>7</u> | $\infty$  |          | 15       |
|          |          | 10        |          |          | 15        |          | <u>9</u> |
|          |          | <u>10</u> |          |          | 13        |          |          |
|          |          |           |          |          | <u>13</u> |          |          |

### 8.1.2 Dĺžka minimálneho spojenia

Uvažujme súvislý hranovo ohodnotený digraf  $\vec{G} = (V, H)$ , to znamená, že každej hrane  $(v_i, v_j)$  je priradené kladné reálne číslo  $f((v_i, v_j)) = w_{ij}$ . Nech  $\vec{S}$  je spojenie

z vrcholu  $v_i$  do vrcholu  $v_j$ . Súčet ohodnotení hrán spojenia  $\vec{S}$  nazývame **dĺžkou spojenia**  $\vec{S}$ . Pre dva vrcholy  $v_i$  a  $v_j$  potom minimálnu z dĺžok spojení z  $v_i$  do  $v_j$  nazveme **dĺžkou minimálneho spojenia** a označíme symbolom  $\vec{d}_w(v_i, v_j)$ . Ak nedôjde k nedorozumeniu, budeme skrátene hovoriť o vzdialenosti z  $v_i$  do  $v_j$ .

Na ohodnotenom digrafe si ukážeme riešenie 3. úlohy z predchádzajúcej strany, t.j. ako určiť vzdialenosti medzi všetkými dvojicami vrcholov ohodnoteného grafu. K tomu potrebujeme pojmy *cenová* a *dištančná* matica.

**Definícia 8.1.** *Nech  $\vec{G} = (V, H)$ ,  $|V| = n$ , je hranovo ohodnotený digraf. štvorcovú maticu  $\mathbf{C} = (c_{ij})$  rádu  $n$  nazývame **cenovou maticou**, ak pre jej prvky platí*

$$c_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & \text{ak } (v_i, v_j) \in H, \\ \infty, & \text{ak } (v_i, v_j) \notin H, \\ 0, & \text{ak } i = j. \end{cases}$$

**Definícia 8.2.** *Nech  $\vec{G} = (V, H)$ ,  $|V| = n$ , je hranovo ohodnotený digraf. štvorcovú maticu  $\mathbf{D} = (d_{ij})$  rádu  $n$  nazývame **dištančnou maticou**, ak pre jej prvky platí*

$$d_{ij} = \begin{cases} \vec{d}_w(v_i, v_j), & \text{ak existuje spojenie z } v_i \text{ do } v_j, \\ \infty, & \text{ak neexistuje spojenie z } v_i \text{ do } v_j, \\ 0, & \text{ak } i = j. \end{cases}$$

Cenová matica sa zo zadaného ohodnoteného digrafu získa ľahko a slúži nám na výpočet dištančnej matice (matice vzdialeností), v ktorej sú prehľadne zapísané dĺžky minimálnych spojení medzi všetkými dvojicami vrcholov. Naším cieľom je teda vypočítať dištančnú maticu. Jedným z možných postupov na jej určenie je tzv. **Floydov algoritmus**, v ktorom štartujeme z cenovej matice a postupným „umocňovaním“ získame dištančnú maticu.

### Algoritmus určenia minimálneho spojenia (Floyd)

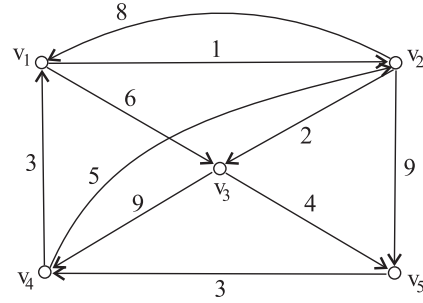
*Vstup:* Hranovo ohodnotený digraf  $\vec{G} = (V, H)$  s vrcholmi  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

*Výstup:* Dištančná matica  $\mathbf{D} = (d_{ij})$ .

1. Polož  $\mathbf{D}^{(0)} := \mathbf{C}$ , kde  $\mathbf{C}$  je cenová matica digrafu  $\vec{G}$ , teda  $d_{ij}^{(0)} = c_{ij}$  pre všetky  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .  
Polož  $k := 1$ .
2. Vytvor maticu  $\mathbf{D}^{(k)} = d_{ij}^{(k)}$  tak, že  
 $d_{ij}^{(k)} := \min\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\}$ .
3. Ak  $k = n$ , STOP ( $\mathbf{D}^{(k)} = \mathbf{D}$ ), inak polož  $k := k + 1$ .  
Skok na krok 2.

**Príklad 8.2.** Zostrojte dištančnú maticu digrafu  $\vec{G}$ , ktorého diagram je na obr. 8.2.

**Riešenie.** Najprv napíšeme cenovú maticu  $\mathbf{C}$  a položíme ju rovnú matici  $\mathbf{D}^{(0)}$ . Pre  $k = 1$  sú v matici  $\mathbf{D}^{(0)}$  prvý riadok a prvý stĺpec „pracovné“, a pre prvok  $d_{ij}^{(1)}$  zostrojovanej matice  $\mathbf{D}^{(1)}$  platí, že je rovný menšiemu z dvojice čísel: prvok na tej istej pozícii v matici  $\mathbf{D}^{(0)}$ , resp. súčet prvku v prvom riadku a  $j$ -tom stĺpci a prvku v prvom stĺpci a  $i$ -tom riadku. Podobne konštruujeme  $\mathbf{D}^{(2)}, \dots, \mathbf{D}^{(5)} = \mathbf{D}$ .



Obr. 8.2

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & \infty & \infty \\ 8 & 0 & 2 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 5 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{D}^{(0)}, \quad \mathbf{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & \infty & \infty \\ 8 & 0 & 2 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & \infty & 10 \\ 8 & 0 & 2 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 12 & 7 \\ 8 & 0 & 2 & 11 & 6 \\ \infty & \infty & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 12 & 7 \\ 8 & 0 & 2 & 11 & 6 \\ 12 & 13 & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^{(5)} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 10 & 7 \\ 8 & 0 & 2 & 9 & 6 \\ 10 & 11 & 0 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Poznámka.** Floydov algoritmus sa dá bez problémov použiť aj na hľadanie dĺžky minimálnych ciest v neorientovanom grafe. Ak ho nechceme veľmi modifikovať, stačí v grafe  $G$  nahradiť každú hranu dvojicou opačne orientovaných hrán s rovnakým ohodnotením.

## 8.2 Minimálna kostra grafu

Až doteraz boli pre nás rôzne kostry daného grafu v zásade rovnocenné, pretože všetky obsahovali rovnaký počet hrán. Iná situácia nastane v hranovo ohodnotenom grafe. V takom prípade má zmysel hľadať kostry grafu, ktoré majú extrémny (t.j. najmenší alebo najväčší) súčet ohodnotení hrán.

Majme súvislý hranovo ohodnotený graf  $G = (V, H)$ . Zo všetkých kostier grafu  $G$  hľadáme takú, ktorá má minimálny súčet ohodnotení všetkých jej hrán. Je zrejmé, že existuje aspoň jedna kostra  $T = (V, H')$  s minimálnym súčtom ohodnotení hrán a nazveme ju **minimálnou kostrou** grafu  $G = (V, H)$ .

Problém určenia minimálnej kostry grafu má svoju motiváciu v praxi. Z našich matematikov sa ním ako prvý úspešne zaoberal O. Borůvka začiatkom 20. rokov minulého storočia v súvislosti s návrhom siete pre rozvod elektriny. ďalšiu metódu riešenia navrhol v roku 1930 V. Jarník, ale základné myšlienky ich algoritmov sa všeobecne rozšírili až po zavedení počítačov. My si uvedieme dva jednoduché algoritmy a to *Primov* a *Kruskalov*. Primov je výhodnejší pri strojovom spracovaní problému, Kruskalov viac využijeme pri riešení malých úloh na cvičeniach, ak budeme riešiť úlohy, ktoré nejakým spôsobom potrebujú minimálnu kostru alebo jej modifikáciu.

### I. Algoritmus určenia minimálnej kostry (Kruskal)

*Vstup:* Hranovo ohodnotený graf  $G = (V, H)$ .

*Výstup:* Minimálna kostra  $T = (V, H')$ .

1. Zostroj diskretný faktor  $T = (V, \emptyset)$ .
2. Zoraď hrany grafu  $G$  do neklesajúcej postupnosti vzhľadom na ich ohodnotenia.
3. Do  $T$  pridaj z neklesajúcej postupnosti prvú hranu, ktorá v  $T$  nevytvorí kružnicu, a z postupnosti hrán ju odober.
4. Ak  $|H'| = |V| - 1$ , STOP ( $T = (V, H')$  je minimálna kostra), inak skok na krok 3.

Z popísaného algoritmu vyplýva, že ak ohodnotenia všetkých hrán sú navzájom rôzne, tak existuje jediná minimálna kostra grafu  $G$ .

### II. Algoritmus určenia minimálnej kostry (Prim)

*Vstup:* Hranovo ohodnotený graf  $G = (V, H)$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ .

*Výstup:* Minimálna kostra  $T = (V(T), H'(T))$ .

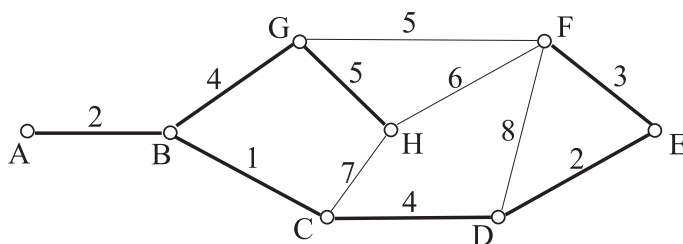
1. Polož  $T := (V(T), H'(T))$ ,  $V(T) := \{v_1\}$ ,  $H'(T) := \emptyset$ .
2. Ak  $|V(T)| = n$ , STOP ( $T$  je minimálna kostra).
3. Pre  $v_i \in V(T)$  a  $v_j \in V(G) \setminus V(T)$  zvoľ hranu  $\{v_i, v_j\}$  s minimálnym ohodnotením.  
 Polož  $V(T) := V(T) \cup \{v_j\}$ ,  $H'(T) := H'(T) \cup \{v_i, v_j\}$ .  
 (Ak je viac hrán  $\{v_i, v_j\}$  s rovnakým minimálnym ohodnotením, z nich majú najprv prednosť hrany s najmenším  $i$  a potom s najmenším  $j$ ).  
 Skok na krok 2.

**Poznámka.** V prípade existencie viacerých minimálnych kostier grafu pri postupe podľa Kruskalovho algoritmu môžeme získať ktorúkoľvek z nich. Primov algoritmus produkuje vždy jedinú kosť, ktorá je určená očíslovaním vrcholov.

**Príklad 8.3.** Predpokladajme, že máme plán okresu, v ktorom existuje určitá sieť ciest prvej triedy. Je potrebné v zimnom období zabezpečiť dopravu tak, aby:

- ľubovoľné dve obce boli spojené zjazdovou cestou,
- náklady na údržbu ciest boli minimálne.

Majme graf, ktorého diagram je modelom tejto situácie. Hranám priradíme hodnoty nákladov na údržbu ciest (napr. v tisíckach korún). Riešením je kosť grafu (silnejšie vyznačená) na obr. 8.3, ktorej súčet ohodnotení hrán je 21.



Obr. 8.3

## 8.3 Problém okružnej cesty

Predstavme si, že v určitom meste má vyjsť z pošty poštový doručovateľ, obísť všetky ulice svojho obvodu a má sa vrátiť naspäť na poštu. Cestu si má naplánovať tak, aby bola najkratšia.

S touto situáciou úzko súvisí **problém okružnej cesty**, ktorý žiada nájsť v súvislom hranovo ohodnotenom grafe uzavretý sled, ktorý obsahuje každú hranu aspoň raz, a pritom súčet ohodnotení hrán toho sledu je minimálny. Požaduje teda také hranové pokrytie grafu, ktorého súčet ohodnotení hrán je minimálny. Uvažujme nasledujúce prípady.

A. Graf  $G = (V, H)$  je hranovo ohodnotený, a pritom eulerovský. V tomto prípade sa graf dá pokryť jedným uzavretým ťahom, v ktorom sa každá hrana grafu vyskytuje práve raz. Súčet ohodnotení hrán toho ťahu je riešením našej úlohy.

B. Graf  $G = (V, H)$  je súvislý a má práve dva vrcholy nepárneho stupňa, nech sú to vrcholy  $u$  a  $v$ . Potom existuje pokrytie grafu jedným otvoreným ťahom s koncovými vrcholmi  $u$  a  $v$ , ktorý už obsahuje všetky hrany grafu  $G$ . Cesta musí byť okružná, a preto z  $u$  do  $v$  (alebo naopak) musíme prejsť po niektorých hranách, ktoré sa už vyskytli v otvorenom ťahu. Pre túto cestu vyberieme zo všetkých možností takú, ktorá dáva minimálny súčet ohodnotení hrán. Je zrejmé, že ak

k súčtu ohodnotení hrán otvoreného ťahu (všetkých hrán grafu) pridáme súčet ohodnotení hrán minimálnej cesty z  $u$  do  $v$ , dostaneme okružnú cestu v grafe  $G$  s minimálnym súčtom ohodnotení hrán.

C. Prípado B môžeme zovšeobecniť. Nech súvislý graf  $G = (V, H)$  obsahuje práve  $2m$  ( $m > 1$ ) vrcholov nepárneho stupňa. Potom sa dá pokryť práve  $m$  otvorenými ťahmi. Každý z otvorených ťahov v jednom vrchole nepárneho stupňa začína a v inom končí. Preto pri riešení problému vyhľadáme všetky vrcholy s nepárnymi stupňami a snažíme sa ich po dvoch pospájať cestami tak, aby súčet hodnotení hrán týchto  $m$  ciest bol minimálny. K tomuto číslu pripočítame súčet ohodnotení všetkých hrán grafu.

**Poznámka.** Problémom vo väčšom grafe môže byť veľký počet vrcholov nepárnych stupňov. Najšť minimálne cesty medzi všetkými vrcholmi nepárnych stupňov grafu  $G$  môžeme napríklad Dijkstrovým algoritmom, ale výhodnejšia je modifikácia Floydovho algoritmu pre neorientované grafy.

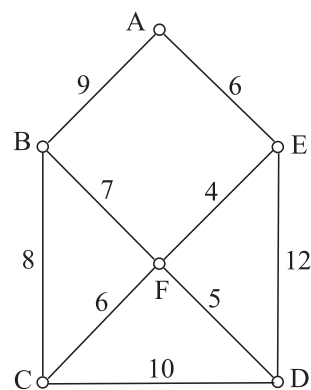
**Príklad 8.4.** Majme hranovo ohodnotený graf  $G$ , ktorého diagram je na obr. 8.4. Vrcholy  $B, C, D, E$  majú nepárne stupne. Potrebujeme teda nájsť dve cesty spájajúce do dvojíc tieto štyri vrcholy tak, že súčet ohodnotení ich hrán je minimálny zo všetkých možností. Máme tri možnosti:

$$ED + BC = 9 + 8 = 17,$$

$$EB + DC = 11 + 10 = 21,$$

$$EC + BD = 10 + 12 = 22.$$

Najvýhodnejší je súčet ciest  $ED + BC = 17$ . Ak k tomu číslu pripočítame súčet ohodnotení všetkých hrán grafu 67, dostaneme hodnotu minimálnej okružnej cesty 84.



Obr. 8.4

## 8.4 Problém obchodného cestujúceho

Majme hranovo ohodnotený súvislý graf, v ktorom vrcholy predstavujú nejaké mestá a hrany cestné spojenia medzi týmito mestami, pričom ohodnotenie hrany predstavuje dĺžku príslušného cestného spojenia. Obchodný cestujúci má vyjsť z jedného pevne zvoleného mesta, prejsť všetkými mestami práve raz a vrátiť sa do pôvodného mesta, pričom má cestu voliť tak, aby bola najkratšia.

Ak použijeme terminológiu teórie grafov, tak v hranovo ohodnotenom súvislom grafe  $G = (V, H)$  máme nájsť *hamiltonovskú kružnicu*, ktorá má minimálny súčet ohodnotení hrán.

Je zrejmé, že v ľubovoľnom súvislom grafe nemusí hamiltonovská kružnica vôbec existovať. V tom prípade úloha nemá riešenie. Už vieme, že nepoznáme efektívne algoritmy ani na zistenie existencie hamiltonovskej kružnice v danom

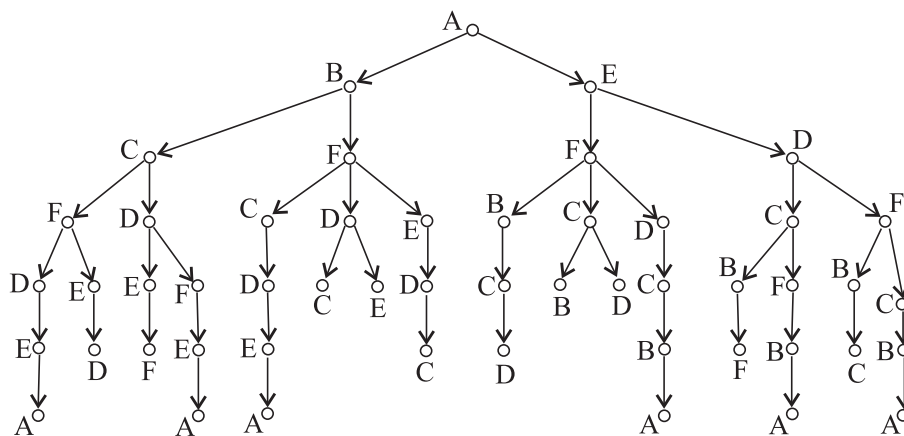
grafe, tobôž na nájdenie minimálnej. My si uvedieme metódu, ktorá spoľahlivo rieši problém obchodného cestujúceho, avšak iba v grafoch s malým počtom hrán. Metódu popíšeme na konkrétnom príklade.

**Príklad 8.5.** Riešte problém obchodného cestujúceho v grafe, ktorého diagram je na obr. 8.4.

**Riešenie.** Keďže v hamiltonovskej kružnici nezáleží na počiatočnom vrchole, predpokladajme, že obchodný cestujúci vyjde z mesta  $A$ , má prejsť cez všetky mestá  $B, C, D, E$  a  $F$  práve raz a vrátiť sa do mesta  $A$ . Súčet ohodnotení prejdenných hrán má byť minimálny.

Na riešenie problému použijeme tzv. *rozhodovací strom*. Z vrcholu  $A$  môžeme ísť do  $B$  alebo do  $E$ . Tejto situácii budú v strome odpovedať dve orientované hrany, a to hrana  $(A, B)$  a hrana  $(A, E)$ . Ak si zvolíme cestu do  $B$ , máme opäť dve možnosti: buď pôjdeme do  $C$  alebo do  $F$ . V rozhodovacom strome potom budú hrany  $(B, C)$  a  $(B, F)$ . Takto pokračujeme ďalej v snahe prejsť všetky vrcholy práve raz a vrátiť sa do vrcholu  $A$ . Získame teda rozhodovací strom s koreňom vo vrchole  $A$ . Ohodnotenia hrán grafu z obr. 8.4 môžeme preniesť aj do koreňového stromu, my ich však kvôli prehľadnosti na obrázok 8.5 nebudeme zapisovať. Na obr. 8.5 je rozhodovací strom, z ktorého je vidieť, že v grafe existuje práve 6 hamiltonovských kružníc, a to:

$$\begin{array}{ll} A B C F D E A & (1) \\ A B C D F E A & (2) \\ A B F C D E A & (3) \end{array} \quad \begin{array}{ll} A E F D C B A & (4) \\ A E D C F B A & (5) \\ A E D F C B A & (6) \end{array}$$



Obr. 8.5

Hamiltonovské kružnice (1) a (6), (3) a (5), a tiež (2) a (4) sú rovnaké, líšia sa iba smerom „obehu“. Preto Ďalej uvažujeme iba kružnice (1), (2) a (3) a

vypočítame súčty ohodnotení ich hrán. Kružnica (2) je minimálna so súčtom 42 ((1) má súčet 46 a (3) má súčet 50). Riešením našej úlohy sú hamiltonovské kružnice (2) a (4).

**Poznámka.** Táto metóda rozhodovacieho stromu už nie je použiteľná pri hranovo hustých grafoch s viac ako 20 vrcholmi ani ak nasadíme rýchle počítače. Boli vyvinuté niektoré *heuristické* metódy, t.j. metódy ktoré nie vždy sú úspešné, ale dosť často úspešné sú aj na grafoch až do 100 vrcholov. Napríklad metódu penalizácie vrcholov môže čitateľ nájsť vo viacerých knihách zo zoznamu literatúry v závere.

## 8.5 Metóda kritickej cesty

Uvažujme určitú sieť projektu nejakého výrobného procesu. **Sieťový graf** je grafová reprezentácia nejakého projektu pozostávajúceho z navzájom súvisiacich úloh, ktoré sa musia vykonať v určitom poradí. Je to teda hranovo ohodnotený súvislý acyklický digraf  $\vec{G} = (V, H)$  s jediným prameňom a jediným ústím. Orientovaná hrana v digrafe  $\vec{G}$  sa používa na znázornenie činnosti, šípka na hrane znázorňuje smer pokračovania v projekte a ohodnotenie každej hrany je plánovaný čas trvania príslušnej činnosti. Vrchol v  $\vec{G}$  označuje stav, kedy sú ukončené činnosti, ktoré doňho vstupujú a môžu začať činnosti z neho vychádzajúce. Predpokladajme, že sa nevyskytujú časové straty. Chceme nájsť *optimálne časové trvanie* celého projektu.

**Kritickou činnosťou** nazývame takú činnosť, predĺženie trvania ktorej (za predpokladu, že v ostatných činnostiach je plánovaná doba trvania dodržaná) spôsobí predĺženie celého procesu. Dráha medzi prameňom a ústím v  $\vec{G}$ , ktorej každá hrana vyjadruje kritickú činnosť, sa nazýva **kritická cesta**.

Vrcholy sieťového grafu budeme označovať trojicou čísel:  $i$ ,  $T(i)$  a  $T'(i)$  (pozri obr. 8.6).

číslo  $i$  znamená poradové číslo pri očíslovaní vrcholov číslami od 1 do  $|V|$  tak, že každá hrana smeruje z čísla menšieho do väčšieho.

číslo  $T(i)$  vyjadruje minimálnu dobu, za ktorú sa dá od začiatku procesu do príslušného stavu dostať – je to **minimálne časové ohodnotenie**.

číslo  $T'(i)$  udáva posledný možný čas, v ktorom musia začať všetky činnosti odpovedajúce hranám vychádzajúcim z vrcholu  $i$ , aby nedošlo k predĺženiu trvania celého procesu – je to **maximálne časové ohodnotenie**.

Stručne si popíšeme činnosť algoritmu na hľadanie minimálneho časového ohodnotenia vrcholov digrafu. Nech sú už očíslované vrcholy digrafu. Začiatok procesu, t.j. vrchol 1 má minimálne časové ohodnotenie 0 ( $T(1) = 0$ ). Nech  $i$  je ľubovoľný vrchol skúmaného digrafu  $\vec{G}$ . Preberieme všetky vrcholy  $j$ ,  $j < i$ , také, že existuje hrana  $(j, i)$ . Ak označíme  $f(j, i)$  ohodnotenie hrany  $(j, i)$ , tak vrchol  $i$  ohodnotíme najväčším z čísel  $T(j) + f(j, i)$ , t.j. označením času, v ktorom budú ukončené

všetky činnosti končiace vo vrchole  $i$ . Aby sme mohli vrchol  $i$  ohodnotiť, musia byť ohodnotené všetky vrcholy s menšími poradovými číslami.

### Algoritmus minimálneho časového ohodnotenia

*Vstup:* Hranovo ohodnotený, súvislý, acyklický digraf  $\vec{G} = (V, H)$  s jediným prameňom, jediným ústím a s očíslovanými vrcholmi od 1 do  $n = |V|$  tak, že pre každú hranu  $(i, j)$  je  $i < j$ .

*Výstup:* Minimálne časové ohodnotenie  $T(i)$  pre každý vrchol  $i$ .

1. Polož  $T(1) := 0$ .
2. Polož  $i := 2$ .
3. Polož  $T(i) := \max\{T(j) + f(j, i)\}$  pre všetky vrcholy  $j < i$ , pre ktoré existuje hrana  $(j, i)$ .
4. Ak  $i = n$ , STOP, inak polož  $i := i + 1$ .  
Skok na krok 3.

### Algoritmus maximálneho časového ohodnotenia

*Vstup:* Hranovo ohodnotený, súvislý, acyklický digraf  $\vec{G} = (V, H)$  s jediným prameňom, jediným ústím a s očíslovanými vrcholmi od 1 do  $n = |V|$  tak, že pre každú hranu  $(i, j)$  je  $i < j$ . Hodnoty  $T(i)$  pre každý vrchol.

*Výstup:* Maximálne časové ohodnotenie  $T'(i)$  pre každý vrchol  $i$ .

1. Polož  $T'(n) := T(n)$ .
2. Polož  $i := n - 1$ .
3. Polož  $T'(i) := \min\{T'(j) - f(i, j)\}$  pre všetky vrcholy  $j > i$ , pre ktoré existuje hrana  $(i, j)$ .
4. Ak  $i = 1$ , STOP, inak polož  $i := i - 1$ .  
Skok na krok 3.

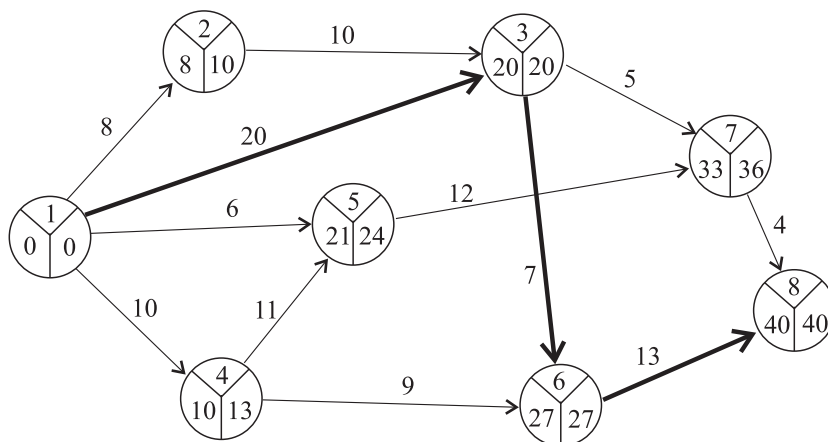
Každý vrchol, ktorého minimálne a maximálne časové ohodnotenia sú rovnaké ( $T(i) = T'(i)$ ), leží na nejakej kritickej ceste, iné vrcholy na kritickej ceste neležia. K tomu, aby hrana  $(i, j)$  ležala na kritickej ceste, musí spĺňať podmienky:

1. Vrcholy  $i, j$  ležia na kritickej ceste, teda  $T(i) = T'(i)$  a  $T(j) = T'(j)$ .
2. Pre ohodnotenie  $f(i, j)$  hrany  $(i, j)$  platí  $f(i, j) = T(j) - T(i)$  ( $f(i, j) = T'(j) - T'(i)$ ).

**Príklad 8.6.** Nájdite kritickú cestu výrobného procesu, ktorý je znázornený grafom získaným z grafu na obr. 8.6, ak v ňom vrcholy „stiahneme“ do malých krúžkov a neuvažujeme čísla vo vrcholoch.

**Riešenie.** Najskôr prekreslíme diagram tak, že väčšie krúžky odpovedajúce vrcholom rozdelíme na tri časti (pozri obr. 8.6). Do horných častí očísľujeme vrcholy tak, aby každá hrana smerovala z vrcholu s menším číslom do vrcholu s väčším. Potom do ľavých častí zapisujeme hodnoty  $T(i)$ , t.j. minimálne časové ohodnotenia. Vo vrchole 1 je  $T(1) = 0$ . Vo vrchole 2 je to  $T(1) + f(1, 2) = 0 + 8 = 8$ , teda  $T(2) = 8$ . Vo vrchole 3 je:  $T(2) + f(2, 3) = 8 + 10 = 18$ ,  $T(1) + f(1, 3) = 0 + 20 = 20$ , preto je  $T(3) = 20$ , atď.

Potom vyplníme hodnoty  $T'(i)$ , t.j. nájdeme maximálne časové ohodnotenia. Začneme vo vrchole 8, tu je  $T'(8) = 40$ . Prejdeme k vrcholu 7, kde  $T'(8) - f(7, 8) = 40 - 4 = 36$ , teda  $T'(7) = 36$ . Takto pokračujeme vždy k vrcholu s číslom o jednotku menším a napríklad pre vrchol 3 je:  $T'(7) - f(3, 7) = 36 - 5 = 31$ ,  $T'(6) - f(3, 6) = 27 - 7 = 20$ , teda vo vrchole 3 je  $T'(3) = 20$ , atď. Hrany kritickej cesty sú na obr. 8.6 vyznačené silnejšie.



Obr. 8.6

## 8.6 Toky v sieťach

Začneme príkladom. Je daná sieť potrubia, pričom potrubie môže mať rôzne priemery a niektoré jeho časti môžu byť aj jednosmerné. Sieť potrubia je uzavretá okrem dvoch miest, začiatku  $a$  a konca  $z$ , kde tekutina do potrubia vteká, resp. z neho vyteká. Máme určiť, aké maximálne množstvo tekutiny môže sieťou za určitú dobu pretiecť z  $a$  do  $z$ . Je logické sa zaujímať o maximálny tok (množstvo kvapaliny za jednotku času). Potrubie a tekutinu sme uviedli iba pre názornosť, ale môže sa jednať o rôzne prenosové siete a prenášané médium môže byť tiež rôzne. Jedným z takých príkladov môžu byť aj siete na prenos informácií medzi jednotlivými počítačmi. Pravidlá, ktoré uvedieme v ďalšej časti, platia pre všetky takéto tzv. *transportné siete*. Teóriu uvedieme iba pre orientované grafy. Ak niektoré potrubia sú obojsmerné, stačí nahradiť neorientované hrany dvojicami opačne orientovaných hrán s rovnakými ohodnoteniami.

**Definícia 8.3.** **Transportná sieť** (alebo skráteno **sieť**) je súvislý, orientovaný, hranovo ohodnotený graf  $\vec{G} = (V, H)$  spĺňajúci nasledujúce podmienky:

1. v  $\vec{G}$  existuje jediný prameň  $a$ ,
2. v  $\vec{G}$  existuje jediné ústie  $z$ ,
3. každá hrana  $(i, j)$  je ohodnotená nezáporným číslom  $C_{ij}$ , ktoré nazývame **kapacita hrany**  $(i, j)$ .

**Poznámka.** V praxi sa iba zriedkavo stáva, že transportná sieť má jediný prameň a jediné ústie. Napríklad vodovodné potrubie rozvádza vodu z viacerých zdrojov a ústia sú v každej domácnosti. Aby sme mohli takúto situáciu matematicky spracovať, pridáme hrany orientované z jedného fiktívneho prameňa do všetkých skutočných, a tiež hrany zo skutočných ústí do fiktívneho ústia. Kapacity nových hrán uvažujeme nekonečne veľké.

**Definícia 8.4.** Nech  $\vec{G}$  je transportná sieť. **Tok** transportnou sieťou je zobrazenie  $T : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow H$ , ktoré každej hrane  $(i, j)$  priradí nezáporné číslo  $T_{ij}$  tak, že:

1. pre každú hranu  $(i, j)$  je  $T_{ij} \leq C_{ij}$ ,
2. pre každý vrchol  $j$  rôzny od prameňa  $a$  a ústia platí **zákon zachovania toku** cez tento vrchol, teda

$$\sum_i T_{ij} = \sum_i T_{ji}.$$

**Veta 8.1.** Nech  $T$  je tok v transportnej sieti  $\vec{G}$ . Potom tok z prameňa je rovný toku do ústia, t.j.

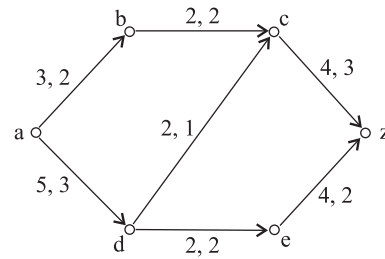
$$\sum_i T_{ai} = \sum_i T_{iz}.$$

**Definícia 8.5.** Nech  $T$  je tok v transportnej sieti  $\vec{G}$ . číslo

$$\sum_i T_{ai} = \sum_i T_{iz}$$

nazývame **veľkosťou toku** v sieti  $\vec{G}$ . Tok  $T$  je **maximálny**, ak pre každý iný tok  $T'$  platí, že jeho veľkosť nie je väčšia ako veľkosť toku  $T$ .

**Príklad 8.7.** Na obr. 8.7 je transportná sieť s vyznačenými kapacitami hrán  $C_{ij}$  (prvé číslo na každej hrane) a s tokmi cez hrany  $T_{ij}$  (druhé číslo). Veľkosť toku je  $T_{ab} + T_{ad} = T_{cz} + T_{ez} = 5$ . Je vidieť, že pre každý vrchol okrem  $a$  a  $z$  platí zákon zachovania toku, teda koľko doňho vtečie, toľko z neho vytečie. Ak by sme ale zmenili tok hranou  $(d, e)$  na hodnotu 1, už by neplatil zákon zachovania toku pre vrcholy  $d$  a  $e$  a ohodnotenia hrán číslami  $T_{ij}$  by sa nemohli nazývať tokom.



Obr. 8.7

V tejto jednoduchnej transportnej sieti ľahko zistíme, že ak na hranách  $(a, d)$ ,  $(d, c)$  a  $(c, z)$  zvážšime tok o jednotku, zostanú v platnosti podmienky kladené na tok a veľkosť toku bude  $T_{ab} + T_{ad} = 6$ , teda tiež väčšia o jednotku. Je to spôsobené zvážšením toku pozdĺž cesty  $P : adc$ . Znamená to, že pôvodný tok v sieti nebol maximálny a bolo možné ho zvážšiť. Nás bude zaujímať práve maximálny tok v sieti, ako získať jeho hodnotu a ako zistiť, že už ho nemožno zvážšiť.

Zistili sme, že ak sa nám podarí nájsť cestu z prameňa do ústia, pozdĺž ktorej je možné zvážšiť tok, tak sa zvážši tok celou sieťou. V našom prípade však všetky hrany cesty  $P : adc$  boli orientované od prameňa k ústiu, teda **zhodne s cestou**  $P$ . V niektorých sieťach je možné zvážšovať tok aj pozdĺž ciest, ktoré obsahujú aj hrany **opačne orientované vzhľadom na cestu**. O možnosti zvážšenia toku celou sieťou nás informuje nasledujúca veta.

**Veta 8.2.** *Nech  $P$  je cesta v transportnej sieti  $\vec{G}$  spĺňajúca podmienky:*

1. *pre každú zhodne orientovanú hranu  $(i, j)$  cesty  $P$  je  $T_{ij} < C_{ij}$ ,*
2. *pre každú opačne orientovanú hranu  $(i, j)$  cesty  $P$  je  $0 < T_{ij}$ .*

*Nech  $X$  je množina obsahujúca čísla  $C_{ij} - T_{ij}$  pre zhodne orientované hrany cesty  $P$  a čísla  $T_{ij}$  pre opačne orientované hrany cesty  $P$ .*

*Ak  $\Delta = \min X$  a  $T^*$  je tok transportnou sieťou definovaný*

$$T_{ij}^* = \begin{cases} T_{ij}, & \text{ak } (i, j) \notin P, \\ T_{ij} + \Delta, & \text{ak } (i, j) \text{ je zhodne orientovaná s } P, \\ T_{ij} - \Delta, & \text{ak } (i, j) \text{ je opačne orientovaná vzhľadom na } P, \end{cases}$$

*tak veľkosť toku  $T^*$  je o  $\Delta$  väčšia ako veľkosť pôvodného toku  $T$ .*

Na základe tejto vety môžeme zostrojiť algoritmus na hľadanie maximálneho toku v transportnej sieti. Princíp jeho činnosti spočíva v tom, že v transportnej sieti so zadanými kapacitami hrán začneme nejakým tokom (môže to byť nulový tok každou hranou) a hľadáme cestu z prameňa do ústia, pozdĺž ktorej je možné tok zvážšiť. Ak ju nájdeme, tok zvážšime, a opakujeme tento proces znovu. Ako pomôcku pri hľadaní cesty z  $a$  do  $z$  použijeme označovanie vrcholov usporiadanou dvojicou znakov, kde prvý znak znamená predchádzajúci vrchol práve označovaného vrcholu na hľadanej ceste  $P$  a druhý znak je rovný hodnote, o ktorú je možné zvážšiť tok na ceste  $P$  od prameňa po práve označovaný vrchol. Za preverený vrchol považujeme taký, z ktorého sme už označovali jeho neoznačených susedov. Algoritmus ukončí svoju činnosť až keď tok sieťou je maximálny. Prečo je to tak, si uvedieme neskôr.

### Algoritmus maximálneho toku (Ford – Fulkerson)

*Vstup:* Transportná sieť  $\vec{G} = (V, H)$ , prameň  $a$ , ústie  $z$ , kapacity hrán  $C_{i,j}$  pre každú hranu  $(i, j)$  a vrcholy očíslované  $a = v_0, v_1, \dots, v_n = z$ .

*Výstup:* Maximálny tok  $T$ .

1. Polož  $T_{ij} := 0$  pre každú hranu  $(i, j)$ .
2. Označ vrchol  $a$  usporiadanou dvojicou  $(, \infty)$ .
3. Ak je vrchol  $z$  označený, skok na krok 6.
4. Zvoľ označený, ale nepreverený vrchol  $v_i$  s najmenším indexom  $i$ . Ak taký neexistuje, STOP (tok je maximálny), inak polož  $v := v_i$ .
5. Nech  $(\alpha, \Delta)$  je označenie vrcholu  $v$ . Prever každú hranu  $(v, w)$  a  $(w, v)$  (v poradí  $(v, v_0), (v_0, v), (v, v_1), (v_1, v), \dots$ ), kde  $w$  je neoznačený vrchol. Ak pre hranu  $(v, w)$  je  $T_{vw} < C_{vw}$ , označ vrchol  $w$  usporiadanou dvojicou

$$(v; \min\{\Delta, C_{vw} - T_{vw}\}),$$

inak hranu  $(v, w)$  neoznačuj. Ak pre hranu  $(w, v)$  je  $T_{wv} > 0$ , označ vrchol  $w$  usporiadanou dvojicou

$$(v; \min\{\Delta, T_{wv}\}),$$

inak hranu  $(w, v)$  neoznačuj.

Skok na krok 3.

6. Nech  $(\gamma, \Delta)$  je označenie vrcholu  $z$ . Nech  $w_0 = z$ ,  $w_1 = \gamma$ . Ak označenie vrcholu  $w_i$  je  $(\gamma', \Delta')$ , polož  $w_{i+1} := \gamma'$ . Pokračuj až do  $w_k = a$ . Teraz

$$P : a = w_k w_{k-1} \dots w_1 w_0 = z$$

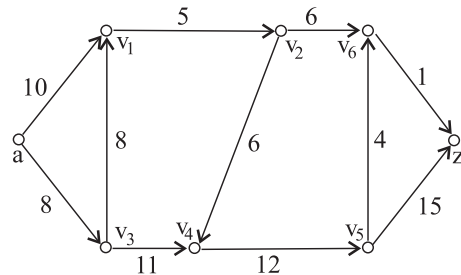
je hľadaná cesta z  $a$  do  $z$ .

Zmeň tok pozdĺž cesty  $P$  takto: Ak hrana  $h$  je zhodne orientovaná s  $P$ , zvýš jej tok o  $\Delta$ , ak je opačne orientovaná, zníž jej tok o  $\Delta$ . Zruš označenia všetkých vrcholov.

Skok na krok 2.

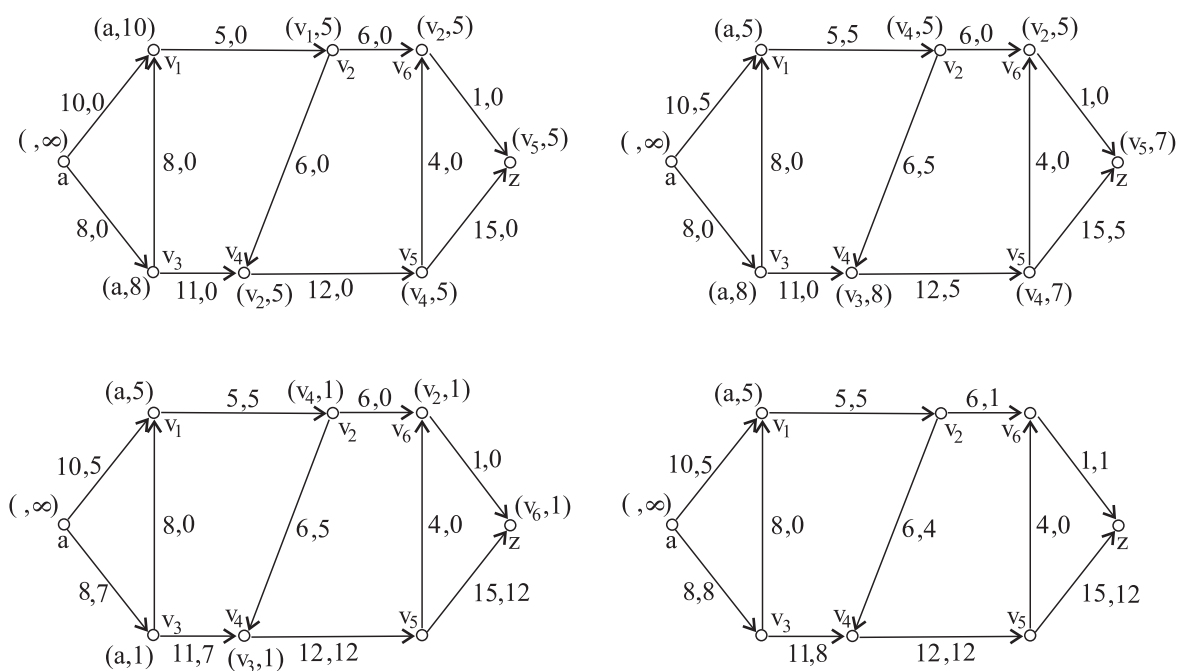
**Príklad 8.8.** Nájdite maximálny tok v transportnej sieti z obr. 8.8.

**Riešenie.** Každéj hrane priradíme tok  $T_{ij} = 0$ . Označíme vrchol  $a$  znakom  $(, \infty)$ . Teraz označujeme jeho susedov, pričom zachováваме ich poradie. Vrchol  $v_1$  označíme znakom  $(a, 10)$  a vrchol  $v_3$  znakom  $(a, 8)$ . Tým sa vrchol  $a$  stáva prevereným. Z označených a nepreverených vrcholov má minimálny index vrchol  $v_1$ , takže teraz sa zaujíame o jeho neoznačených susedov. Je to jediný vrchol  $v_2$  a dostane označenie  $(v_2, 5)$ . ďalší preverovaný vrchol je  $v_2$ .



Obr. 8.8

Jeho neoznačené susedné vrcholy  $v_4$  a  $v_6$  označíme rovnako  $(v_2, 5)$ . Teraz z označených a nepreverených vrcholov má najmenší index vrchol  $v_3$ . Nemá neoznačených susedov a tým sa stáva prevereným. Nasleduje vrchol  $v_4$ . Jeho jediný neoznačený sused  $v_5$  dostane označenie  $(v_4, 5)$ . Teraz preverujeme  $v_5$  a z neho označíme iba vrchol  $z$  znakom  $(v_5, 5)$ . Keďže vrchol  $z$  je už označený, pokračujeme krokom 6, kde získame cestu  $P : av_1v_2v_4v_5z$ , pozdĺž ktorej môžeme zväčšiť tok o hodnotu 5. Urobíme to a začneme celý proces hľadania novej cesty z prameňa do ústia odznova. ďalšie pokračovania sa dajú sledovať na postupnosti diagramov na obr. 8.9.



Obr. 8.9

Na vysvetlenie, že v momente ukončenia práce algoritmu je už dosiahnutý tok maximálny, potrebujeme nasledujúce pojmy.

**Definícia 8.6.** *Rez  $(P, \overline{P})$  v transportnej sieti  $\vec{G} = (V, H)$  je rozklad jej vrcholovej množiny na množinu  $P$  obsahujúcu prameň a jej komplement  $\overline{P}$ , ktorý obsahuje ústie.*

**Kapacita rezu  $(P, \overline{P})$  je číslo**

$$C(P, \overline{P}) = \sum_{i \in P} \sum_{j \in \overline{P}} C_{ij}.$$

Rez v sieti je teda ľubovoľné rozdelenie vrcholovej množiny  $V$  na množiny  $P$  a  $\bar{P}$ , pričom  $a \in P$ ,  $z \in \bar{P}$ ,  $P \cup \bar{P} = V$  a  $P \cap \bar{P} = \emptyset$ . Kapacita rezu je súčet kapacít všetkých hrán, ktoré začínajú v  $P$  a končia v  $\bar{P}$ . Hrany z  $\bar{P}$  do  $P$  nás pri kapacite rezu nezaujímajú.

**Veta 8.3.** *Nech  $T$  je tok v transportnej sieti  $\vec{G} = (V, H)$  a nech  $(P, \bar{P})$  je rez v  $\vec{G}$ . Potom kapacita rezu  $(P, \bar{P})$  je väčšia alebo rovná ako veľkosť toku  $T$ , t.j.*

$$C(P, \bar{P}) = \sum_{i \in P} \sum_{j \in \bar{P}} C_{ij} \geq \sum_i T_{ai}.$$

**Veta 8.4.** *Nech  $T$  je tok v transportnej sieti  $\vec{G} = (V, H)$  a nech  $(P, \bar{P})$  je rez v  $\vec{G}$ . Ak veľkosť toku  $T$  je rovná kapacite rezu  $(P, \bar{P})$ , tak tok  $T$  je maximálny a rez  $(P, \bar{P})$  je minimálny. Navyše*

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in \bar{P}} C_{ij} = \sum_i T_{ai}$$

práve vtedy, ak

- a)  $T_{ij} = C_{ij}$  pre všetky  $i \in P$  a  $j \in \bar{P}$   
a zároveň  
b)  $T_{ij} = 0$  pre všetky  $i \in \bar{P}$  a  $j \in P$ .

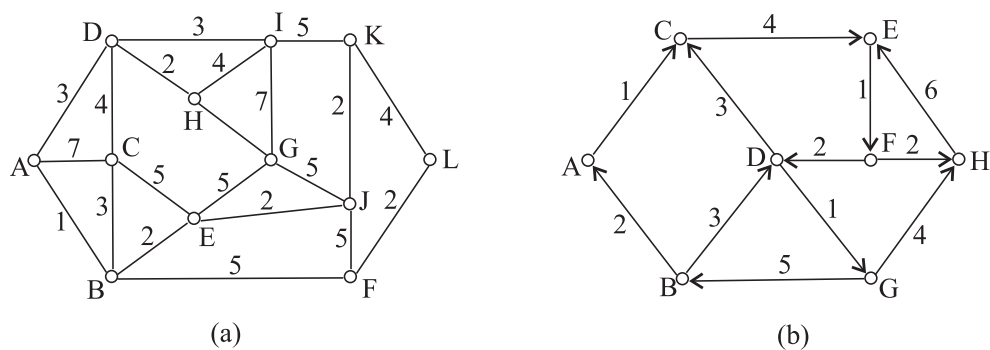
To znamená, že ak sa nám v transportnej sieti podarí nájsť taký rez  $(P, \bar{P})$ , že pre každú hranu smerujúcu z  $P$  do  $\bar{P}$  je tok cez ňu rovný jej kapacite a tok každou hranou z  $\bar{P}$  do  $P$  je nulový, tak máme minimálny rez a jeho kapacita je zároveň rovná maximálnemu toku sieťou. Ak si všimneme, že algoritmus na hľadanie maximálneho toku končí práve vtedy, keď už nemôžeme označovať ďalšie vrcholy, t.j. keď hrany smerujúce z označených vrcholov do neoznačených sú už nasýtené a zároveň hrany z neoznačených vrcholov do označených majú nulové hodnoty toku, tak môžeme vysloviť nasledujúcu vetu.

**Veta 8.5.** *V momente skončenia činnosti algoritmus (Ford – Fulkerson) dáva na výstupe maximálny tok. Navyše, ak  $P$  ( $\bar{P}$ ) je množina označených (neoznačených) vrcholov v okamihu ukončenia činnosti algoritmu, tak rez  $(P, \bar{P})$  je minimálny.*

## 8.7 Úlohy

8.1. V grafe, ktorého diagram je na obr. 8.10(a):

- Nájdite minimálnu kostru.
- Nájdite maximálnu kostru.
- Vypočítajte dĺžky minimálnych ciest z vrcholu  $a$  do ostatných vrcholov.
- Riešte problém okružnej cesty.

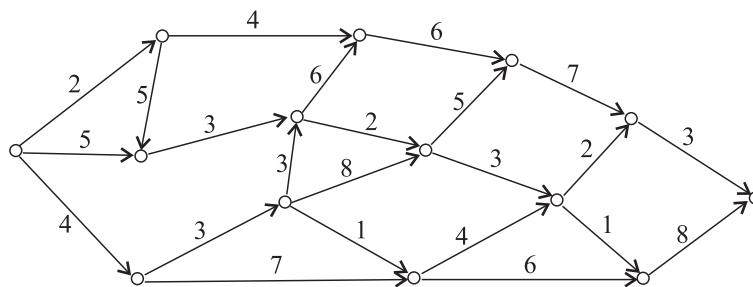


Obr. 8.10

8.2. Vypočítajte dĺžky minimálnych spojení medzi všetkými dvojicami vrcholov v digrafe na obr. 8.10(b).

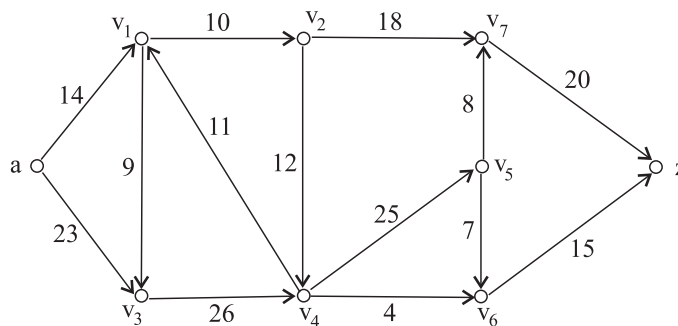
8.3. V grafe získanom zrušením orientácií hrán digrafu na obr. 8.10(b) riešte problém obchodného cestujúceho.

8.4. Nájdite kritickú cestu v sieťovom grafe, ktorého diagram je na obr. 8.11.



Obr. 8.11

8.5. Vypočítajte maximálny tok transportnou sieťou, ktorá je na obr. 8.12.



Obr. 8.12

# Kapitola 9

## Formálná logika

### 9.1 Výroková logika

Jednou z hlavných úloh modernej logiky je hľadanie vhodného formálneho jazyka, ktorý dovolí vyjadrovať tvrdenia o nejakej oblasti, a pritom sa vyhne rozporom.

Preto budeme hľadať odpovede na tieto otázky:

- a) či platia alebo neplatia niektoré tvrdenia sformulovane v uvažovanom jazyku,
- b) kedy nejaké tvrdenie vyplýva z iných tvrdení,
- c) ako skonštruovať dôkaz tvrdenia.

Najskôr popíšeme axiňšomy a odvodzovacie pravidlá, ktoré určujú vlastností logických spojok, a to vo formálnom systéme, ktorý nazývame výroková logika (výrokový počet).

Ak k výrokovej logike pridáme axiomy a odvodzovacie pravidlá pre kvantifikátory, vznikne predikátová logika (predikátový počet).

V prvých troch paragrafoch výrokovej logiky sa oboznámime so základnými pojmami ako sú výrok, pravdivostná hodnota výroku a logické spojky. Budeme sa v prevažnej miere opierať o intuíciu, až neskôr, v ďalších paragrafoch tieto pojmy po formálnej stránke upresníme.

Majme nejaký jazyk ako dorozumievaci prostriedok. Niektoré gramatické vety, okrem toho, že môžu vytvárať zložené vety - súvetia, obsahujú v sebe určitú informáciu, o ktorej má zmysel rozhodovať, či je pravdivá alebo nepravdivá.

Napr.: "Súčet vnútorných uhlov v každom trojuholníku je 180 stupňov" alebo "Košice sú najväčším mestom na svete". Prisúdenie pravdivosti alebo nepravdivosti týchto viet nie je problém jazykovedcov, ale odborníkov.

Taká istá situácia je aj v prípade symbolických jazykov, ako sú napr. programovací jazyk alebo jazyk matematických disciplín. Existujú gramaticke vety, o pravdivosti alebo nepravdivosti ktorých nemá zmysel hovoriť. Sú to všetky opytavacie, rozkazovacie a zvolacie vety, napr.: "Nehovor a pís!"

Uvažujme nejaký jazyk  $J$ , v ktorom je daná istá množina  $V_0$  výrazov ktoré majú tieto vlastnosti:

1. O každom výraze jazyka  $J$  vieme rozhodnúť, či patrí alebo nepatrí do  $V_0$ .
2. Každé dva výrazy z  $V_0$  vieme navzájom rozlíšiť.
3. Každý výraz z  $V_0$  je pravdivý alebo nepravdivý.

Výrazom z množiny  $V_0$  budeme hovoriť **elementárne výroky** a označovať písmenami

$$p, q, r, \dots,$$

alebo písmenom  $p$  s indexom

$$p_1, p_2, \dots$$

Ak elementárny výrok  $p$  je pravdivý, potom píšeme

$$v(p) = 1$$

a čítame "pravdivostná hodnota výroku  $p$  sa rovná jednej".

Analogicky, ak elementárny výrok  $p$  je nepravdivý, tak píšeme  $v(p) = 0$  čítame "pravdivostná hodnota výroku  $p$  je nula".

## 9.2 Logické spojky

V prirodzenom jazyku z daných viet vytvárame zložené vety – súvetia – pomocou spojok. Vo formálnej logike sa vyskytujú tieto typy "zložených viet":

1. "Nie je pravda, že  $A$ ".
2. " $A$  alebo  $B$ ".
3. " $A$  a  $B$ ".

4. "Ak  $A$ , tak  $B$ ".

5. " $A$  práve vtedy, ak  $B$ ".

Písmena  $A$  a  $B$  tu zastupujú nejaké vety (také, o pravdivosti ktorých má zmysel hovoriť). Slovám, pomocou ktorých sú v 1 až 5 vytvorené zložené vety, budeme hovoriť **logické spojky**. Teda, logickými spojkami sú:

"nie je pravda, že ..."

"... alebo . . ."

"ak ..., tak ..."

"... práve vtedy, ak ...".

Pomocou uvedených logických spojok môžeme z elementárnych formúl jazyka  $J$  vytvárať nové výrazy, napr.:

"ak  $p$ , tak  $q$ "

" $p$  práve vtedy, ak  $r$ "

"ak  $p$  alebo  $q$ , tak nie je pravda, že  $r$ "

Pre jednotlivé logické spojky budeme používať tieto znaky:

1. "nie je pravda, že" :  $\neg$

2. "alebo" :  $\vee$

3. "a" :  $\wedge$

4. "ak, tak" :  $\Rightarrow$

5. "práve vtedy, ak" :  $\Leftrightarrow$

a budeme ich (v uvedenom poradí) nazývať: **negácia, disjunkcia, konjunkcia, implikácia, ekvivalencia**.

Okrem týchto znakov pre zapis výrazov budeme používať zátvorky, a to:

ľavú zátvorku (

a pravú zátvorku ).

Zátvorky budú vyjadrovať **prioritu** jednotlivých logických spojok pri vytváraní výrazov. Potom nasledujúce výrazy môžeme pomocou zavedených symbolov vyjadriť takto:

”ak  $p$ , tak  $q$ ” má symbolický zápis:  $p \Rightarrow q$ ,

” $p$  práve vtedy, ak  $r$ ” má symbolický zápis:  $p \Leftrightarrow r$ ,

”ak  $p$  alebo  $q$ , tak nie je pravda, že  $r$ ” má symbolický zápis:  $(p \vee q) \Rightarrow (\neg r)$ .

Majme množinu  $V_0$  elementárnych výrokov. Potom:

1. Elementárne výroky sú výroky.
2. Ak  $A$  a  $B$  sú výroky, tak aj  $\neg A$ ,  $A \vee B$ ,  $A \wedge B$ ,  $A \Rightarrow B$ ,  $A \Leftrightarrow B$  sú výroky.
3. Výroky sú práve tie výrazy z  $V_0$ , ktoré sa dajú utvoriť podľa 1 a 2.

**Príklad 9.1** Výraz

$$((p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q))$$

je výrok, pretože ho môžeme vytvoriť pomocou 1 až 3 takto:

$p, q$  podľa 1.,

$p \wedge q$  podľa 2.,

$p \vee q$  podľa 2.,

$((p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q))$  podľa 3.

**Konvencia o zátvorkách.**

Pri dôslednom používaní zátvoriek sa výraz môže stať malo prehľadným. Pre zjednodušenie zápisu sa preto dohodneme dodržiavať nasledujúcu dohodu:

1. Namiesto  $(p)$  budeme písať:  $p$ .
2. Namiesto  $(\neg(B))$  budeme písať  $\neg B$ .
3. Nech  $\Delta$  a  $\nabla$  sú dve spojky vybrané zo spojok:

$$\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow.$$

Potom:

a) namiesto  $(\neg(A))\Delta(B)$  budeme písať  $\neg A\Delta B$ ,

b) namiesto  $(B)\Delta(\neg(A))$  budeme písať  $B\Delta\neg A$ ,

c) namiesto

$$((A)\Delta(B))\nabla(C) \quad \text{a} \quad (C)\nabla((A)\Delta(B))$$

budeme písať

$$(A\Delta B)\nabla C \quad \text{a} \quad C\nabla(A\Delta B).$$

**Príklad 9.2** Výrok

$$(p) \Rightarrow ((q) \vee (r))$$

budeme zapisovať

$$p \Rightarrow (q \vee r).$$

Výraz

$$p \Rightarrow q \Rightarrow r$$

nie je výrok, pretože podľa pravidiel 1., 2. a konvencie o zátvorkách nemôžeme jednoznačne rozhodnúť, či ide o výrok

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$$

alebo o výrok

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r.$$

### 9.3 Pravdivostná hodnota

Každému elementárnemu výroku  $p \in V_0$  sme priradili pravdivostnú hodnotu  $v(p)$ . Na tomto mieste pripomínáme pravdivostné tabuľky.

|          |     |          |
|----------|-----|----------|
|          | $A$ | $\neg A$ |
| Negácia: | 1   | 0        |
|          | 0   | 1        |

|             |     |     |            |
|-------------|-----|-----|------------|
|             | $A$ | $B$ | $A \vee B$ |
|             | 0   | 0   | 0          |
| Disjunkcia: | 0   | 1   | 1          |
|             | 1   | 0   | 1          |
|             | 1   | 1   | 1          |

|             |     |     |              |
|-------------|-----|-----|--------------|
|             | $A$ | $B$ | $A \wedge B$ |
|             | 0   | 0   | 0            |
| Konjunkcia: | 0   | 1   | 0            |
|             | 1   | 0   | 0            |
|             | 1   | 1   | 1            |

|             |     |     |                   |
|-------------|-----|-----|-------------------|
|             | $A$ | $B$ | $A \Rightarrow B$ |
|             | 0   | 0   | 1                 |
| Implikácia: | 0   | 1   | 1                 |
|             | 1   | 0   | 0                 |
|             | 1   | 1   | 1                 |

|               |     |     |                       |
|---------------|-----|-----|-----------------------|
|               | $A$ | $B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|               | 0   | 0   | 1                     |
| Ekvivalencia: | 0   | 1   | 0                     |
|               | 1   | 0   | 0                     |
|               | 1   | 1   | 1                     |

Vhodným použitím tabuliek môžeme určiť pravdivostnú hodnotu zložitejších výrokov.

**Príklad 9.3** Vyšetříme pravdivostnú hodnotu výroku

$$B = (((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (\neg r \Rightarrow q)) \Rightarrow (p \Rightarrow r).$$

Označme

$$K = ((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (\neg r \Rightarrow q), \quad T = p \Rightarrow r$$

potom

$$B = (K \Rightarrow T).$$

V záhlaví tabuľky vypíšeme všetky výroky, z ktorých je daný výrok vytvorený podľa bodov 1., 2. a do stĺpcov označujúcich elementárne výroky napíšeme všetky možné kombinácie symbolov 0 a 1.

Ostatné stĺpce doplníme použitím príslušnej tabuľky definujúcej pravdivostnú hodnotu výroku  $A \triangle B$ .

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg r$ | $p \wedge q$ | $p \wedge q \Rightarrow r$ | $\neg r \Rightarrow q$ | $K$ | $p \Rightarrow r$ | $B$ |
|-----|-----|-----|----------|--------------|----------------------------|------------------------|-----|-------------------|-----|
| 0   | 0   | 0   | 1        | 0            | 1                          | 0                      | 0   | 1                 | 1   |
| 0   | 0   | 1   | 0        | 0            | 1                          | 1                      | 1   | 1                 | 1   |
| 0   | 1   | 0   | 1        | 0            | 1                          | 1                      | 1   | 1                 | 1   |
| 0   | 1   | 1   | 0        | 0            | 1                          | 1                      | 1   | 1                 | 1   |
| 1   | 0   | 0   | 1        | 0            | 1                          | 0                      | 0   | 0                 | 1   |
| 1   | 0   | 1   | 0        | 0            | 1                          | 1                      | 1   | 1                 | 1   |
| 1   | 1   | 0   | 1        | 1            | 0                          | 1                      | 0   | 0                 | 1   |
| 1   | 1   | 1   | 0        | 1            | 1                          | 1                      | 1   | 1                 | 1   |

Výrok  $B$  je pravdivý vždy, bez ohľadu na to, či elementárne výroky  $p, q, r$  sú pravdivé alebo nepravdivé.

## 9.4 Formuly výrokovej logiky

V posledných dvoch častiach sme sa zoznámili s intuitívnym chápaním pojmov výroku a pravdivostnej hodnoty výroku. Pokúsme sa tieto pojmy vymedziť presnejšie.

**Definícia 9.1** Pod **abecedou** rozumieme konečnú alebo spočítateľnú množinu  $A$ . Ľubovoľnú postupnosť prvkov množiny  $A$  nazývame **slovom**.

Niektoré slová v poslednej definícii nemajú zmysel. Je zrejmé, že je účelné rozlišovať medzi slovami utvorenými "správne" (napr. mur) a slovami, ktoré sú iba náhodným zoskupením prvkov množiny  $A$  (napr. umr).

**Definícia 9.2** Abecedu výrokovej logiky (AVL) tvoria výrokové premenné:

$$p, q, r, \dots, p, p_1, p_2, \dots,$$

logické spojky:

$$\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow,$$

zátvorky:  $(, )$ .

Označme  $V_0 = \{p, q, \dots\}$  množinu výrokových premenných,  $S = \{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$  množinu logických spojok. Je zrejmé, že množina  $V_0$  je nekonečná a množina  $S$  je konečná.

**Definícia 9.3** Pravdivostné ohodnotenie  $v$  (valuácia) je zobrazenie množiny  $V$  do množiny  $\{0, 1\}$ . Píšeme  $v : V_0 \rightarrow \{0, 1\}$ .

**Definícia 9.4** *Postupnosť slov*

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

je **vytvárajúcou postupnosťou formuly (VPF)** práve vtedy, ak pre každé  $i, 1 \leq i \leq n$  je splnená práve jedna z týchto podmienok:

1.  $A_i$  je výroková premenná.
2.  $A_i$  je negácia niektorého prvku množiny  $\{A_1, A_2, \dots, A_{i-1}\}$ .
3.  $A_i$  vznikla z nejakých dvoch prvkov množiny  $\{A_1, A_2, \dots, A_{i-1}\}$  aplikáciou niektorej z logických spojok  $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ .

Poslednú definíciu môžeme formulovať aj takto:

**Definícia 9.5** *Postupnosť slov*

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

je **vytvárajúcou postupnosťou formuly (VPF)** práve vtedy, ak pre každé  $i, 1 \leq i \leq n$  je splnená práve jedna z týchto podmienok:

- 1'.  $A_i$  je výroková premenná.
- 2'. Existuje  $j < i$  také, že  $A_i$  je práve  $\neg A_j$ .
- 3'. Existujú  $j, k < i$  a  $\Delta \in S$  také, že  $A_i$  je  $A_j \Delta A_k$ .

**Definícia 9.6** Slovo  $A$  v abecede výrokovej logiky je **formula výrokovej logiky** práve vtedy, ak existuje taká vytvárajúca postupnosť formuly, že  $A$  je jej posledným členom.

Jednotlivé formuly budeme označovať veľkými písmenami. Množinu vsetkých formúl označme  $F$ . Abecedu výrokovej logiky spolu s formulami výrokovej logiky budeme nazývať **jazykom výrokovej logiky (JVL)**.

**Príklad 9.4** Slovo

$$p \Rightarrow (q \vee \neg r)$$

je formula s vytvárajúcou postupnosťou

$$p, q, r, \neg r, q \vee \neg r, p \Rightarrow (q \vee \neg r).$$

Každá formula (slovo) má určitú zložitosť, ktorá je daná počtom logických spojok  $s(A)$ . Z toho je zrejmé, že všetky výrokové premenné majú zložitosť rovnú nule, to znamená, že patria do množiny  $V_0$ .

Zápis  $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$  znamená, že formula  $A$  neobsahuje iné výrokové premenné ako  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

**Príklad 9.5** Ak  $A = p \wedge r \wedge q$ , tak môžeme písať  $A(p, q, r) = p \wedge r \wedge q$ .

Okrem vytvárania nových formúl pomocou logických spojok, môžeme ich tvoriť aj postupom, ktorý nazývame substitúcia.

Ak  $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$  je formula a  $B_1, B_2, \dots, B_n$  sú slová z abecedy výrokovej logiky, tak

$$A(p_1/B_1, p_2/B_2, \dots, p_n/B_n)$$

budeme označovať slovo v abecede výrokovej logiky, ktoré dostaneme z

$$A(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

tak, že všade v  $A$ , kde sa vyskytuje písmeno  $p_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) namiesto neho dosadíme slovo  $B_i$ . Potom hovoríme, že slovo

$$A(p_1/B_1, p_2/B_2, \dots, p_n/B_n)$$

vzniklo substitúciou (dosadením)  $B_1, B_2, \dots, B_n$  za  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

Dá sa dokázať, že ak  $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ,  $B_1, B_2, \dots, B_n$  sú formuly, tak aj

$$A(p_1/B_1, p_2/B_2, \dots, p_n/B_n)$$

je formula.

**Príklad 9.6** Nech  $A = p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ ,  $B = \neg p$ ,  $C = r \Rightarrow q$ . Potom

$$A(p/B, q/C, r/r) = \neg p \Rightarrow ((r \Rightarrow q) \Rightarrow r).$$

Boolovskú algebru sme definovali ako usporiadanú šesticu  $\mathcal{B}_2 = (D, \dot{\vee}, \dot{\wedge}, ', 0, 1)$ ,  $D = \{0, 1\}$ , pričom pre  $a, b \in \{0, 1\}$  platí:

| $a$ | $b$ | $a'$ | $b'$ | $a \dot{\vee} b$ | $a \dot{\wedge} b$ |
|-----|-----|------|------|------------------|--------------------|
| 0   | 0   | 1    | 1    | 0                | 0                  |
| 0   | 1   | 1    | 0    | 1                | 0                  |
| 1   | 0   | 0    | 1    | 1                | 0                  |
| 1   | 1   | 0    | 0    | 1                | 1                  |

Porovnaním s tabuľkami pravdivostných hodnôt pre jednotlivé logické spojky zistíme, že

$$v(\neg A) = (v(A))',$$

$$v(A \vee B) = v(A) \dot{\vee} v(B),$$

$$v(A \wedge B) = v(A) \dot{\wedge} v(B),$$

$$v(A \Rightarrow B) = v(A)' \dot{\vee} v(B),$$

$$v(A \Leftrightarrow B) = (v(A) \dot{\wedge} v(B)) \dot{\vee} (v(A)' \dot{\wedge} (v(B))').$$

Aby sme posledné zápisy mohli zjednodušiť, definujme v boolovskej algebre  $\mathcal{B}_2$  okrem operácií  $\dot{\wedge}$  a  $\dot{\vee}$  ešte ďalšie dve binárne operácie, ktoré označíme:  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ . Je rozumné ich definovať v súlade s pravdivostnými tabuľkami pre logické spojky:  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ .

$$0 \rightarrow 0 = 1, \quad 0 \leftrightarrow 0 = 1,$$

$$0 \rightarrow 1 = 1, \quad 0 \leftrightarrow 1 = 0,$$

$$1 \rightarrow 0 = 0, \quad 1 \leftrightarrow 0 = 0,$$

$$1 \rightarrow 1 = 1, \quad 1 \leftrightarrow 1 = 1.$$

Je zrejmé, že pre  $a, b \in \mathcal{B}_2$  platí

$$a \rightarrow b = a' \dot{\vee} b, \quad a \leftrightarrow b = (a' \dot{\vee} b) \dot{\wedge} (a \dot{\vee} b').$$

**Definícia 9.7** Interpretácia jazyka výrokovkej logiky v boolovskej algebre  $\mathcal{B}_2$  je zobrazenie  $v : F \rightarrow \{0, 1\}$  také, že platí:

$$v(\neg A) = (v(A))',$$

$$v(A \vee B) = v(A) \dot{\vee} v(B),$$

$$v(A \wedge B) = v(A) \dot{\wedge} v(B),$$

$$v(A \Rightarrow B) = v(A)' \dot{\vee} v(B),$$

$$v(A \Leftrightarrow B) = (v(A) \dot{\wedge} v(B)) \dot{\vee} (v(A)' \dot{\wedge} (v(B))').$$

$v(A)$  nazývame pravdivostnou hodnotou formuly  $A$ .

## 9.5 Ekvivalencia formúl

Vo všeobecnosti pod syntaxom rozumieme štúdium vnútornej stránky štruktúry systémov znakov (symbolov) nezávisle na tom, akú funkciu vykonávajú.

Sémantika zahrňuje štúdium systémov znakov ako prostriedok vyjadrovania zmyslu (významu, obsahu).

**Definícia 9.8** *Formula  $A$  je sémanticky ekvivalentná s formulou  $B$ , píšeme*

$$A \equiv B,$$

*práve vtedy, ak v každej interpretácii v jazyka výrokovej logiky (JVL) v boolovskej algebre  $\mathcal{B}_2$  platí  $v(A) = v(B)$ .*

Iná formulácia:

Formula  $A$  je sémanticky ekvivalentná s formulou  $B$  práve vtedy, ak má rovnakú pravdivostnú hodnotu ako formula  $B$ , nezávisle od pravdivostných hodnôt výrokových premenných. Čiže formuly  $A$  a  $B$  sa líšia iba syntakticky, t.j. svojou formou (ako slová jazyka výrokovej logiky).

**Definícia 9.9** *Formula  $A$  je tautológia (kontradikcia) práve vtedy, ak pre každú interpretáciu v jazyka výrokovej logiky v boolovskej algebre  $\mathcal{B}_2$  platí:*

$$v(A) = 1 \quad (v(A) = 0).$$

Zmysel poslednej definície je v tom, že tautológia je vždy pravdivá (bez ohľadu na pravdivostné hodnoty výrokových premenných, z ktorých je vytvorená). Formula je kontradikcia, ak je vždy nepravdivá.

Ak  $A$  je tautológia, tak píšeme

$$\models A.$$

**Veta 9.1** *Formula  $A$  je sémanticky ekvivalentná s formulou  $B$  práve vtedy, ak formula  $A \Leftrightarrow B$  je tautológia.*

Dôkaz. Máme dokázať, že  $A \equiv B$  práve vtedy, ak  $\models (A \Leftrightarrow B)$ .

1. Nech  $A \equiv B$ , t.j.  $v(A) = v(B)$ . Podľa definície interpretácie jazyka výrokovej logiky v boolovskej algebre  $\mathcal{B}_2$  je

$$v(A \Leftrightarrow B) = v(A) \leftrightarrow v(B) = (v(A) \dot{\wedge} v(B)) \dot{\vee} (v(A)' \dot{\wedge} (v(B))') = v(A) \dot{\vee} (v(A))' = 1.$$

2. Nech  $\models (A \Leftrightarrow B)$ , t.j.  $v(A \Leftrightarrow B) = 1$ . Potom

$$v(A \Leftrightarrow B) = v(A) \leftrightarrow v(B) = (v(A) \dot{\wedge} v(B)) \dot{\vee} (v(A)' \dot{\wedge} (v(B))') = v(A) \dot{\vee} v(A)' = 1.$$

Z toho  $v(A) \wedge v(B) = 1$  alebo  $v(A)' \wedge v(B)' = 1$ . V prvom prípade je

$$v(A) = v(B) = 1,$$

v druhom prípade máme

$$v(A)' = v(B)' = 1,$$

a teda

$$v(A) = v(B) = 0.$$

□

**Veta 9.2** *Relácia  $\equiv$  je reláciou ekvivalencie na množine  $F$ .*

Dôkaz. Bez ťažkostí sa dá overiť, že relácia sémantickej ekvivalencie  $\equiv$  je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

□

Z definície interpretácie jazyka výrokovej logiky a definície sémantickej ekvivalencie vyplýva, že všetky tautológie sú ekvivalentné s tautológiou

$$p \vee \neg p = 1$$

a všetky kontradikcie sú ekvivalentné s formulou

$$p \wedge \neg p = 0.$$

Na logické spojky  $\vee, \wedge$  môžeme pozeráť aj ako na binárne operácie na množine  $F$ : každým dvom formulám  $A, B \in F$  je jednoznačne priradená formula  $A \vee B$  a formula  $A \wedge B$ . Analogicky logickú spojku  $\neg$  môžeme považovať za unárnu operáciu na  $F$ .

Utvorme rozklad množiny  $F$  na základe relácie ekvivalencie  $\equiv$  na triedy a množinu týchto tried označme  $F_e$ . Platí nasledujúca veta:

**Veta 9.3** *Algebraický systém  $(F_e, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$  je boolovská algebra.*

Z toho, že platí posledná veta vyplýva rad dôležitých tvrdení o sémantickej ekvivalencii formúl. Niektoré z nich uvádzame:

$$\begin{array}{ll} A \vee B \equiv B \vee A & A \wedge B \equiv B \wedge A \\ A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C & A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C \\ A \vee A \equiv A & A \wedge A \equiv A \\ A \vee (A \wedge B) \equiv A & A \wedge (A \vee B) \equiv A \\ A \vee I \equiv I & A \wedge I \equiv A \\ A \vee O \equiv A & A \wedge O \equiv O \\ A \vee \neg A \equiv I & A \wedge \neg A \equiv O \\ \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B & \neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \\ \neg(\neg A) \equiv A & \end{array}$$

Ďalšie sémantické ekvivalentnosti:

$$A \Rightarrow B \equiv B \vee \neg A, \quad A \Leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B),$$

$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A, \quad A \wedge B \equiv \neg(A \Rightarrow \neg B),$$

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A), \quad A \vee B \equiv \neg A \Rightarrow B.$$

V mnohých prípadoch k formule  $A$  je výhodné nájsť formulu, ktorá je s ňou sémanticky ekvivalentná a ktorá má nejakým spôsobom "normalizovaný" tvar. Zo všetkých normálnych tvarov vyberieme dva, ktoré majú najväčší praktický význam.

Z asociatívnych zákonov

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C, \quad A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$$

vyplýva, že ak formula  $A$  je vytvorená z formúl  $A_1, \dots, A_n$  iba pomocou symbolov

$$\vee, (, ),$$

prípadne

$$\wedge, (, ),$$

tak pri každom rozložení zátvoriek dostaneme formulu ekvivalentnú s formulou  $A$ . Označme ju

$$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n = \bigvee_{i=1}^n A_i,$$

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n = \bigwedge_{i=1}^n A_i.$$

V Ďalsom budeme potrebovať nasledujúce označenia:

Nech  $A$  je formula,  $c$  je jeden zo symbolov 0 alebo 1, potom

$$A^c = \begin{cases} A, & \text{ak } c = 1, \\ \neg A, & \text{ak } c = 0. \end{cases}$$

**Definícia 9.10** Nech  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sú výrokové premenné. **Elementárna konjunkcia** je formula, ktorá má tvar

$$p_1^{c_1} \wedge p_2^{c_2} \wedge \dots \wedge p_n^{c_n}$$

a **elementárna disjunkcia** je formula tvaru

$$p_1^{c_1} \vee p_2^{c_2} \vee \dots \vee p_n^{c_n}.$$

**Definícia 9.11** *Formula  $A$  má disjunktívny normálny tvar práve vtedy, ak*

$$A = A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_m$$

*a konjunktívny normálny tvar práve vtedy, ak*

$$A = B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_m,$$

*kde  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) je elementárna konjunkcia a  $B_i$  je elementárna disjunkcia.*

**Veta 9.4** *Ku každej formule výrokovej logiky  $A$  existujú formuly tvaru*

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_m, \quad B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_m,$$

*ktoré sú s ňou sémanticky ekvivalentné.*

## 9.6 Realizácia boolovských funkcií

Majme formulu  $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$ . Formula  $B$  je podformulou danej formuly  $A$  práve vtedy, ak existujú prirodzené čísla  $i, j; 1 \leq i \leq j \leq n$  také, že  $B$  je slovo  $a_i a_{i+1} \dots a_j$  alebo menej formálne formulu výrokovej logiky, ktorá sa vyskytuje vo všetkých vytvárajúcich postupnostiach formuly  $A$ , nazývame podformulou (subformula) formuly  $A$ .

**Príklad 9.7** Podformulami formuly

$$(p \Rightarrow (q \wedge r)) \vee (q \Leftrightarrow r)$$

sú

$$p, q \wedge r, q \Leftrightarrow r, p \Rightarrow (q \wedge r).$$

Každej formule  $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$  výrokovej logiky prislúcha tabuľka pravdivostných hodnôt. Avšak tá istá tabuľka hodnôt jednoznačne určuje istú boolovskú funkciu  $n$  premenných, ktorú označíme  $f_A$  a budeme ju nazývať **pravdivostnou funkciou formuly  $A$** .

Riešme nasledujúcu úlohu. K danej funkcii  $f \in BF(n)$  máme nájsť takú formulu  $A$ , že  $f = f_A$ .

**Definícia 9.12** *Formula  $A$  realizuje boolovskú funkciu  $f$  práve vtedy, ak  $f = f_A$ .*

**Veta 9.5** *Ku každej boolovskej funkcii existuje formula, ktorá ju realizuje.*

Dôkaz.

1. Nech  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ . Potom zrejme

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \wedge \bar{x}_1.$$

2. Nech  $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ . Potom ju možno vyjadriť v disjunktívnom normálnom tvare

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n), f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}.$$

Znamená to, že ľubovoľnú funkciu možno vyjadriť formulou pozostávajúcou z troch funkcií a to negácie, konjunkcie a disjunkcie.

□

## 9.7 Minimálna realizácia boolovskej formuly

V istých prípadoch je vhodné nájsť čo najkratší normálny tvar formuly. Na tento účel bolo vyvinutých niekoľko metód. K najobľúbenejším patrí **Karnaughova mapa**, ktorú môžeme definovať nasledujúco:

Nech je daná formula  $A(a_1, \dots, a_n)$  výrokovej logiky, pričom  $a_1, \dots, a_n$  sú navzájom rôzne logické premenné. Navyše predpokladajme, že máme zostavenú pravdivostnú tabuľku formuly  $A$ , ktorá má  $2^n$  riadkov.

Predpokladajme, že  $s \in N$ ,  $s > 1$ . V prípade, že  $s = 1$  Karnaughovu mapu nie je možné zostaviť.

Nech  $s = 2k$  ( $s$  je párne).

Zoznam premenných rozdelíme na dve podmnožiny rovnakej mohutnosti:

$$\{a_1, \dots, a_\ell\} \text{ a } \{a_{\ell+1}, \dots, a_s\},$$

kde  $\ell = s/2$ .

Skonstruujeme dvojrozmernú tabuľku  $KM$ , ktorá má  $2^\ell$  riadkov a  $2^\ell$  stĺpcov.

Každý riadok bude označený  $\ell$ -ticou núl a jednotiek, pričom označenia riadkov, ako  $\ell$ -tice núl a jednotiek sa líšia práve v jednej pološke.

Každý stĺpec bude označený  $\ell$ -ticou núl a jednotiek, pričom označenia stĺpcov, ako  $\ell$ -tice núl a jednotiek sa líšia práve v jednej pološke.

Ak  $(r_1, \dots, r_\ell)$  je označenie riadku a  $(s_1, \dots, s_\ell)$  je označenie stĺpca potom tabuľka  $KM$  bude mať na danej pozícii hodnotu z riadku  $(r_1, \dots, r_\ell, s_1, \dots, s_\ell)$  pravdivostnej tabuľky formuly  $A$ .

Nech  $s = 2k + 1, s > 1$  ( $s$  je nepárne).

Zoznam premenných rozdelíme na dve podmnožiny rovnakej mohutnosti:

$$\{a_1, \dots, a_\ell\} \text{ a } \{a_{\ell+1}, \dots, a_s\},$$

kde  $\ell = (s - 1)/2$ .

Skonstruujeme dvojrozmernú tabuľku  $KM$ , ktorá má  $2^\ell$  riadkov a  $2^{\ell+1}$  stĺpcov.

Každý riadok bude označený  $\ell$ -ticou núl a jednotiek, pričom označenia riadkov, ako  $\ell$ -tice núl a jednotiek sa líšia práve v jednej poločke.

Každý stĺpec bude označený  $\ell$ -ticou núl a jednotiek, pričom označenia stĺpcov, ako  $\ell$ -tice núl a jednotiek sa líšia práve v jednej poločke.

Ak  $(r_1, \dots, r_\ell)$  je označenie riadku a  $(s_1, \dots, s_{\ell+1})$  je označenie stĺpca potom tabuľka  $KM$  bude mať na danej pozícii hodnotu z riadku  $(r_1, \dots, r_\ell, s_1, \dots, s_{\ell+1})$  pravdivostnej tabuľky formuly  $A$ .

Takejto dvojrozmernej tabuľke  $KM$  budeme hovoriť **Karnaughova mapa** formuly  $A$ .

Karnaughova mapa je založená na preorganizovaní pravdivostnej tabuľky boolovskej formuly do tvaru, z ktorého sa dajú ľahko identifikovať časti vyjadriteľné ako konjunkcie čo najmenšieho počtu literálov. V prípade dvoch premenných je to obyčajná štvorcová tabuľka  $2 \times 2$ . Ak sú premenné tri, tabuľka je typu  $2 \times 4$ , ak sú štyri, je typu  $4 \times 4$ . Stĺpce, resp. riadky, v posledných dvoch prípadoch sú špecifikované ohodnoteniami dvojíc výrokových premenných, pričom susedné sú práve tie, ktoré sa líšia v jednej zložke. Teda za susedné sú považované aj oba krajné stĺpce, resp. riadky. Napríklad v Karnaughovej mape

| pq/rs | 00 | 01 | 11 | 10 |
|-------|----|----|----|----|
| 00    | 1  | 1  | 0  | 1  |
| 01    | 0  | 1  | 0  | 0  |
| 11    | 0  | 0  | 1  | 0  |
| 10    | 0  | 0  | 0  | 0  |

| pq/rs | 00 | 01 | 11 | 10 |
|-------|----|----|----|----|
| 00    | 1  | 1  | 0  | 1  |
| 01    | 0  | 1  | 0  | 0  |
| 11    | 0  | 0  | 1  | 0  |
| 10    | 0  | 0  | 0  | 0  |

tučne vyznačené stĺpce a riadky sú susedné.

Karnaughovu mapu si teda môžeme predstaviť ako objekt nakreslený na povrchu anuloidu (torus), čo je priestorové teleso, tvarom pripomínajúce pneumatiku.

**Definícia 9.13** *Bázickou maticou jedničiek (núl) nazývame časť Karnaughovej mapy zo samých jedničiek (resp. núl) vytvárajúcu obdĺžnik susedných políčok. Rozmery tohto obdĺžnika musia byť celočíselné mocniny čísla dva.*

Každá bázičná matica jedničiek (resp. núl) odpovedá elementárnej konjunkcii (resp. klauzule). Čím väčšia matica, tým menej literálov treba na jej vyjadrenie.

**Príklad 9.8** Karnaughova mapa

| pq/rs | 00       | 01 | 11 | 10       |
|-------|----------|----|----|----------|
| 00    | <b>1</b> | 0  | 0  | <b>1</b> |
| 01    | 0        | 0  | 0  | 0        |
| 11    | 0        | 0  | 0  | 0        |
| 10    | 0        | 0  | 0  | 0        |

obsahuje bázičnú maticu jedničiek s rozmermi obdĺžníka  $1 \times 2$ .

**Príklad 9.9** Karnaughova mapa

| pq/rs | 00       | 01 | 11 | 10       |
|-------|----------|----|----|----------|
| 00    | <b>1</b> | 0  | 0  | <b>1</b> |
| 01    | 0        | 0  | 0  | 0        |
| 11    | 0        | 0  | 0  | 0        |
| 10    | <b>1</b> | 0  | 0  | <b>1</b> |

obsahuje bázičnú maticu jedničiek s rozmermi obdĺžníka  $2 \times 2$ .

**Príklad 9.10** Karnaughova mapa

| pq/rs | 00       | 01       | 11       | 10 |
|-------|----------|----------|----------|----|
| 00    | <b>1</b> | <b>1</b> | <b>1</b> | 0  |
| 01    | 0        | 0        | 0        | 0  |
| 11    | 0        | 0        | 0        | 0  |
| 10    | 0        | 0        | 0        | 0  |

nie je bázičná matica, s rozmermi obdĺžníka jedničiek  $1 \times 3$ .

**Príklad 9.11** Nájdime minimálne normálne realizácie boolovskej formuly určenej nasledujúcou tabuľkou.

|          |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| <i>p</i> | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| <i>q</i> | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| <i>r</i> | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| <i>s</i> | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| <i>f</i> | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Najprv identifikujeme minimálny počet čo najväčších bázičných matíc jedničiek pokrývajúcich všetky jedničky v tele Karnaughovej mapy na obrázku.

| pq/rs | 00 | 01 | 11 | 10 |
|-------|----|----|----|----|
| 00    | 0  | 0  | 1  | 1  |
| 01    | 1  | 0  | 1  | 1  |
| 11    | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 10    | 1  | 1  | 0  | 0  |

Potom dostávame nasledujúce bázické matice s vyznačenými obdĺžníkmi jednotiek:

|         |       |    |    |    |    |
|---------|-------|----|----|----|----|
|         | pq/rs | 00 | 01 | 11 | 10 |
|         | 00    | 0  | 0  | 1  | 1  |
| $K_1 =$ | 01    | 0  | 0  | 1  | 1  |
|         | 11    | 0  | 0  | 0  | 0  |
|         | 10    | 0  | 0  | 0  | 0  |

ktorá odpovedá klauzule  $\neg p \wedge q \wedge \neg s$ ,

|         |       |    |    |    |    |
|---------|-------|----|----|----|----|
|         | pq/rs | 00 | 01 | 11 | 10 |
|         | 00    | 0  | 0  | 0  | 0  |
| $K_2 =$ | 01    | 1  | 0  | 0  | 1  |
|         | 11    | 0  | 0  | 0  | 0  |
|         | 10    | 0  | 0  | 0  | 0  |

ktorá odpovedá klauzule  $\neg p \wedge \neg r$ ,

|         |       |    |    |    |    |
|---------|-------|----|----|----|----|
|         | pq/rs | 00 | 01 | 11 | 10 |
|         | 00    | 0  | 0  | 0  | 0  |
| $K_3 =$ | 01    | 0  | 0  | 0  | 0  |
|         | 11    | 0  | 0  | 0  | 0  |
|         | 10    | 1  | 1  | 0  | 0  |

ktorá odpovedá klauzule  $p \wedge \neg q \wedge \neg r$ .

Potom minimálny disjunktívny normálny tvar formuly je nasledujúci:

$$(\neg p \wedge q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r).$$

## 9.8 Relácia vyplývania

**Definícia 9.14** *Formula A vyplýva z konečnej množiny formúl*

$$\Gamma = \{G_1, \dots, G_n\}$$

*práve vtedy, ak  $v(A) = 1$  pre každú interpretáciu  $v$ , pre ktorú  $v(G_i) = 1$ ,  $G_i \in \Gamma$ .*

Z uvedenej definície je evidentné, že  $A$  vyplýva z  $\Gamma$  práve vtedy, keď pre jej pravdivostnú tabuľku (funkciu) platí

$$f_A(c_1, c_2, \dots, c_n) = 1,$$

a pre každú formulu  $G$

$$f_G(c_1, c_2, \dots, c_n) = 1.$$

Ak  $A$  vyplýva z  $\Gamma$ , tak zapíšeme

$$\Gamma \models A.$$

Vzhľadom na to, že  $\Gamma = \{G_1, \dots, G_n\}$ , budeme písať aj

$$G_1, \dots, G_n \models A.$$

**Príklad 9.12** Zistite, či platí:

$$p \Rightarrow q, \quad (p \vee r) \models (q \vee r).$$

Zostrojme pravdivostnú tabuľku:

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \Rightarrow q$ | $p \vee r$ | $q \vee r$ |
|-----|-----|-----|-------------------|------------|------------|
| 0   | 0   | 0   | 1                 | 0          | 0          |
| 0   | 0   | 1   | 1                 | 1          | 1          |
| 0   | 1   | 0   | 1                 | 0          | 1          |
| 0   | 1   | 1   | 1                 | 1          | 1          |
| 1   | 0   | 0   | 0                 | 1          | 0          |
| 1   | 0   | 1   | 0                 | 1          | 1          |
| 1   | 1   | 0   | 1                 | 1          | 1          |
| 1   | 1   | 1   | 1                 | 1          | 1          |

V tomto prípade

$$\Gamma = \{p \Rightarrow q, p \vee r\}.$$

Vidíme, že pravdivostná hodnota obidvoch formúl z  $\Gamma$  je 1 v riadkoch 2, 4, 7 a 8. Keďže v týchto riadkoch je rovná 1 aj pravdivostná hodnota formuly

$$A = q \vee r,$$

platí, že

$$\Gamma \models A$$

alebo

$$p \Rightarrow q, p \vee r \models q \vee r.$$

**Veta 9.6** Formula  $B$  vyplýva z  $A_1, A_2, \dots, A_n$  práve vtedy, ak  $B$  vyplýva z  $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ .

Dôkaz. Stačí uvažovať, že

$$v(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) = 1$$

práve vtedy, keď

$$v(A_1) = v(A_2) = \cdots = v(A_n) = 1.$$

□

Nasledujúce tvrdenia uvádzame bez dôkazov:

1.  $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$  práve vtedy, ak  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \models A_n \Rightarrow B$ .
2.  $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$  práve vtedy, ak  $\models A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$ .
3. Pravidlo modus ponens:  $A, A \Rightarrow B \models B$ .

## 9.9 Výrokový kalkul

Pojem vyplývania je sémantický:  $\Gamma \models A$  práve vtedy, ak z pravdivosti formúl z  $\Gamma$  vyplýva pravdivosť formuly  $A$ .

Teraz zavedieme pojem dokázateľnosti z  $\Gamma$ , ktorý je syntaktickou analógiou pojmu vyplývania.

**Definícia 9.15** *Hovoríme, že formula  $A$  vyplýva z formúl  $B$  a  $C$  podľa pravidla modus ponens (MP) práve vtedy, ak*

$$C = B \Rightarrow A.$$

Poznamka. Akonáhle tri formuly majú tvar

$$B, B \Rightarrow A, A,$$

tak prehlásime o formule  $A$ , že vyplýva z prvých dvoch podľa pravidla modus ponens (MP).

Pravidlo modus ponens (MP) nazývame dedukčným pravidlom výrokovej logiky.

**Definícia 9.16** *Axiómami výrokovej logiky nazývame nasledujúce formuly:*

1.  $A \Rightarrow (B \Rightarrow A),$
2.  $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)),$
3.  $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A),$
4.  $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B),$

5.  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)),$
6.  $A \vee B \Rightarrow B \vee A,$
7.  $A \wedge B \Rightarrow B \wedge A,$
8.  $A \Rightarrow A \vee B$
9.  $A \wedge B \Rightarrow A$
10.  $A \Rightarrow (B \Rightarrow A \wedge B),$
11.  $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C),$
12.  $(A \Rightarrow B \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A,$
13.  $A \wedge \neg A \Rightarrow B,$
14.  $A \vee \neg A.$

Dá sa overiť, že každá z formúl 1 až 14 je tautológia.

**Definícia 9.17** *Dôkaz z množiny formúl  $\Gamma$  je postupnosť formúl*

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

*taká, že každý jej člen  $A_i$  spĺňa práve jednu z podmienok:*

1.  $A_i$  je axióma výrokovej logiky.
2.  $A_i \in \Gamma.$
3. Existuje  $j, k < i$  také, že  $A_i$  vyplýva z  $A_j$  a  $A_k$  podľa pravidla modus ponens.

Poznámka. Pojem definovaný v poslednej definícii sa niekedy nazýva aj "formálny dôkaz".

**Definícia 9.18** *Formula  $A$  je dokázateľná z  $\Gamma$  práve vtedy, ak existuje dôkaz z  $\Gamma$  taký, že*

$$A_1, A_2, \dots, A_n = A.$$

Ak  $A$  je dokázateľná z  $\Gamma$  budeme zapisovať  $\vdash A$  a formuly z  $\Gamma$  nazývame predpoklady.

Výrokový kalkul je tvorený formulami výrokovej logiky, axiómami 1 až 14 a pravidlom modus ponens spolu s popísanou procedúrou dôkazu.

**Veta 9.7** *Formula  $A$  je dokázateľná práve vtedy, ak je tautológia.*

Poslednú vetu môžeme ekvivalentne zapísať nasledujúco.

**Veta 9.8**  $\vdash A$  práve vtedy, ak  $\models A$ .

## 9.10 Úlohy

9.1. Overte, či

$$((p) \vee (q)) \Rightarrow \neg r.$$

je výrok.

9.1. Vyšetrite pravdivostnú hodnotu výroku

$$A = (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \vee \neg p).$$

9.1. Vyšetrite pravdivostnú hodnotu výroku

$$B = (p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q).$$

9.1. Presvedčte sa, že nasledujúce formuly sú tautológie:

$$(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B),$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B),$$

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)).$$

9.1. Overte, že platí:

$$p \vee q, \quad p \Rightarrow q \models q,$$

$$p \vee q \vee r, \quad q \Rightarrow r \models p \vee r,$$

$$p \Rightarrow q, \quad p \Rightarrow r \models p \Rightarrow (q \vee r).$$

# Kapitola 10

## Predikátová logika

### 10.1 Predikát

Oznamovacia veta " $x + y$  je nepárne číslo" nie je výrok, pretože o jej pravdivosti môžeme rozhodnúť až vtedy, keď za  $x$  a  $y$  dosadíme konkrétne čísla. Označme

$$G(x, y) = x + y$$

pre všetky  $(x, y) \in R \times R$ . Zrejme, že  $G$  je funkciou dvoch premenných. Hodnota  $G(2, 5)$  je rovná 7 a veta: "7 je nepárne číslo" je pravdivý výrok; hodnota  $G(2, 2)$  sa rovná 4 a veta: "4 je nepárne číslo" je nepravdivý výrok.

Funkciu  $G(x, y)$  nazveme výrokovou funkciou dvoch premenných  $x$  a  $y$ . Namiesto terminu "výroková funkcia" budeme používať aj termín "predikát".

**Definícia 10.1** *Nech je daná  $M$  ľubovoľná množina a  $M_1, M_2, \dots, M_n$  sú jej podmnožiny. Funkciu definovanú na karteziánskom súčine  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ , ktorej oborom hodnôt sú výroky, nazývame **n-miestny predikát**.*

Výrok môžeme považovať za 0-miestny predikát. Predikáty budeme označovať veľkými písmenami:  $P, Q, \dots$ , alebo s indexmi:  $P_1, P_2, \dots, Q_1, Q_2, \dots$ . Ak budeme uvažovať  $n$ -miestny predikát  $P$ , vtedy píšeme  $P^n$ , alebo  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**Definícia 10.2** **Obor pravdivosti predikátu**  $P^n$  *definovaného na  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$  je množina všetkých usporiadaných  $n$ -tíc  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ , pre ktoré  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$  je pravdivý výrok.*

**Príklad 10.1** Nech  $R$  je množina všetkých reálnych čísel. Na karteziánskom súčine  $R$  nech je definovaný predikát  $Q(x, y, z)$  vzťahom

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14.$$

Výroky  $Q(1, 2, 3)$ ,  $Q(3, 1, 2)$  sú pravdivé výroky a  $Q(0, 2, -1)$ ,  $Q(-1, 2, 7)$  sú nepravdivé výroky.

Preto body  $(1, 2, 3)$ ,  $(3, 1, 2)$  patria do oboru pravdivosti  $Q(x, y, z)$  a body  $(0, 2, -1)$ ,  $(-1, 2, 7)$  do neho nepatria.

Všeobecne  $(a, b, c) \in R^3$  patrí do oboru pravdivosti  $Q(x, y, z)$  práve vtedy, ak

$$a^2 + b^2 + c^2 = 14$$

a z geometrického hľadiska bod  $(a, b, c)$  leží na guľovej ploche

$$a^2 + b^2 + c^2 = 14.$$

U predikátov niekedy nebudeme uvádzať definičný obor. V tomto prípade predpokladáme, že jeho "obor definície" je množina všetkých objektov, ktoré keď dosadíme za premenné, tak dostaneme výrok.

Nech  $P$  je  $n$ -miestny predikát definovaný na karteziánskom súčine  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = J$  a  $Q$  je  $m$ -miestny predikát definovaný na  $Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_m = K$ . Potom pre  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in J$  a  $(b_1, b_2, \dots, b_m) \in K$  sú výrokmi:

$$\neg P(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n) \vee Q(b_1, b_2, \dots, b_m),$$

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n) \wedge Q(b_1, b_2, \dots, b_m),$$

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n) \Rightarrow Q(b_1, b_2, \dots, b_m),$$

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n) \Leftrightarrow Q(b_1, b_2, \dots, b_m).$$

Pomocou  $P$  a  $Q$  môžeme definovať nové predikáty:

$$\neg P, P \vee Q, P \wedge Q, P \Rightarrow Q, P \Leftrightarrow Q.$$

**Príklad 10.2** Majme dvojmiestny predikát definovaný na  $R^2$  vzťahom

$$P(x, y) = 9x^2 + 4y^2 \leq 36$$

a  $Q$  je jednomiestny predikát

$$0 \leq x \leq 1.$$

Potom obor pravdivosti predikátu  $\neg P$  je množina všetkých bodov roviny  $R^2$ , ktoré ležia mimo elipsy  $9x^2 + 4y^2 = 36$ . Obor pravdivosti predikátu  $P \wedge D$  sú body ležiace v elipse  $9x^2 + 4y^2 = 36$ , pre ktoré platí  $0 \leq x \leq 1$ .

Obor pravdivosti predikátu  $P \vee Q$  sú body ležiace v elipse  $9x^2 + 4y^2 = 36$  alebo pre ktoré platí  $0 \leq x \leq 1$ .

V ěalsom zavedieme pojem kvantifikátorov:

1. Existenčný (malý) kvantifikátor  $\exists$  ( $\exists x$  čítame: "existuje (aspoň jedno  $x$ )").
2. Všeobecný (velký) kvantifikátor  $\forall$  (symbol  $\forall x$  čítame: "pre všetky  $x$ ").

Vymedzíme význam použítia kvantifikátorov na predikát.

**Definícia 10.3** *Nech  $1 \leq i \leq n$  a  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  je predikát. Potom*

$$(\forall x_i)P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

*je  $(n - 1)$ -miestny predikát závislý na premenných  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ , ktorého hodnota pre  $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$  je pravdivý výrok práve vtedy, ak 1-miestny predikát  $P(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$  je pravdivý pre všetky  $x_i \in M_i$ .*

**Príklad 10.3** Majme dvojmiestny predikát  $S(x, y)$  tvaru

$$x^2 \geq y.$$

Utvorme

$$(\forall x)(x^2 \geq y),$$

a to je už jednomiestny predikát závislý na jednej premennej  $y$ . Výrok

$$(\forall x)(x^2 \geq b),$$

je pravdivý pre všetky  $b \in (-\infty, 0)$ . Teda obor pravdivosti predikátu

$$(\forall x)(x^2 \geq y),$$

je interval  $(-\infty, 0)$ .

**Definícia 10.4** *Nech  $1 \leq i \leq n$  a  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  je predikát. Potom*

$$(\exists x_i)P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

*je  $(n - 1)$ -miestny predikát závislý na premenných  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ , ktorého hodnota pre  $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$  je pravdivý výrok práve vtedy, ak 1-miestny predikát  $P(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$  je pravdivý pre aspoň jednu hodnotu premennej  $x_i \in M_i$ .*

Táto časť je venovaná abstraktnejšiemu prístupu k predikátovej logike.

**Abecedu predikátovej logiky tvoria:**

premenné:  $x_1, x_2, \dots, x_n, y, z, \dots$

predikátové symboly:  $P_1^1, P_2^1, \dots, Q_1^1, Q_2^1, \dots, P^1, P^2, \dots$

funkcionálne symboly:  $f_1^1, f_2^1, \dots, q_1^1, q_2^1, \dots, f^1, f^2, \dots$

individuálne konštanty:  $a_1, a_2, \dots, a, b, \dots$

logické spojky:  $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow,$

kvantifikátory:  $\exists, \forall,$

zátvorky:  $(, )$ .

Horný index predikátového symbolu  $P_i^k$  a funkcionálneho symbolu  $f_i^k$  označuje  $k$ -miestny predikátový symbol, respektíve  $k$ -árnu operáciu. V Ďalsom budeme aj o  $k$ -miestnom predikáte hovoriť ako o  $k$ -árnom predikáte.

**Definícia 10.5** *Termy sú:*

1. Premenné a individuálne konštanty.
2. Ak  $t_1, t_2, \dots, t_n$  sú termy a  $f^n$  je  $n$ -árny funkcionálny symbol, tak aj

$$f^n(t_1, t_2, \dots, t_n) \text{ je term.}$$

3. Každý term môžeme zostrojiť podľa bodov 1. a 2.

**Definícia 10.6** *Formulu definujeme:*

1. Ak  $P^n$  je  $n$ -árny predikátový symbol a  $t_1, t_2, \dots, t_n$  sú termy, tak

$$P^n(t_1, t_2, \dots, t_n) \text{ je formula.}$$

2. Ak  $F$  a  $G$  sú formuly, tak aj

$$\neg F, F \vee G, F \wedge G, F \Rightarrow G, F \Leftrightarrow G \text{ sú formuly.}$$

3. Ak  $F$  je formula a  $x$  je premenná, tak  $(\forall x)F$  a  $(\exists x)F$  sú formuly.

4. Každá formula vznikne podľa 1. až 3. bodu.

Formuly vytvorené podľa bodu 1. nazývame atomické formuly.

Posledné definície sú "gramatikou" predikátovej logiky.

**Jazykom predikátovej logiky** (JPL) nazývame abecedu predikátovej logiky spolu s formulami predikátovej logiky.

Niekedy nepotrebujeme kompletný jazyk predikátovej logiky, ale vystačíme aj s jeho určitými časťami.

Formula v jazyku  $\mathcal{L}$  je formula predikátovej logiky vytvorená len zo symbolov jazyka  $\mathcal{L}$ . Píšeme  $\mathcal{L} = (\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{K})$ , kde  $\mathcal{P}$  je množina predikátových symbolov,  $\mathcal{F}$  množina funkcionálnych premenných a  $\mathcal{K}$  množina individuálnych konstant.

**Definícia 10.7 Interpretácia jazyka  $\mathcal{L} = (\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{K})$  v množine  $M$  je zobrazenie  $\mathcal{V}_M$ , ktoré každému  $P^n \in \mathcal{P}$  priraduje  $n$ -árnu reláciu  $\bar{P}_n \subset M^n$ , každej funkcionálnej premennej  $f^n \in \mathcal{F}$  priraduje  $n$ -árnu operáciu  $\bar{f}^n$  na  $M$  a každej individuálnej konstante  $a \in \mathcal{K}$  priraduje prvok  $\bar{a} \in M$ .**

Nech  $t$  je term jazyka  $\mathcal{L}$  a  $c_1, c_2, \dots, c_n \in M$ . Definujme indukzívne "hodnotu" termu  $t(c_1, c_2, \dots, c_n)$ :

1. Ak  $t$  je  $a_i$ , tak  $t(c_1, c_2, \dots, c_n) = \bar{a}_i$ ,
2. Ak  $t$  je  $x_i$ , tak  $t(c_1, c_2, \dots, c_n) = c_i$ ,
3. Ak  $t$  je  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , tak

$$t(c_1, c_2, \dots, c_n) = f(t_1(c_1, c_2, \dots, c_n), \dots, t_n(c_1, c_2, \dots, c_n)).$$

Z 1-3 vidíme, že hodnota  $t(c_1, c_2, \dots, c_n)$  termu  $t$  je prvok z množiny  $M$ . Analogicky hodnota  $F(c_1, c_2, \dots, c_n)$  formuly  $F$  pre  $c_1, c_2, \dots, c_n \in M$  je výrok

1.  $P(t_1(c_1, c_2, \dots, c_n), \dots, t_n(c_1, c_2, \dots, c_n))$ , ak  $F$  je  $P(t_1, \dots, t_n)$ ,
2.  $\neg G(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , ak  $F$  je  $\neg G$ ,
3.  $G(c_1, c_2, \dots, c_n) \vee H(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , ak  $F$  je  $G \vee H$ ,
4.  $G(c_1, c_2, \dots, c_n) \wedge H(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , ak  $F$  je  $G \wedge H$ ,

5.  $G(c_1, c_2, \dots, c_n) \Rightarrow H(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , ak  $F$  je  $G \Rightarrow H$ ,
6.  $G(c_1, c_2, \dots, c_n) \Leftrightarrow H(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , ak  $F$  je  $G \Leftrightarrow H$ ,
7.  $(\forall x)G(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , ak  $F$  je  $(\forall x)G(x)$ ,
8.  $(\exists x)G(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , ak  $F$  je  $(\exists x)G(x)$ .

Formula jazyka  $\mathcal{L}$  je vždy pravdivá (tautológia) práve vtedy, ak je pravdivá v každej interpretácii  $\mathcal{V}_M$ .

Premenná  $x$  sa v danej formule môže vyskytnúť viackrát. Daný výskyt premennej  $x$  je viazaný, ak sa nachádza bezprostredne za kvantifikátorom alebo je v jeho rozsahu. Inak je výskyt premennej  $x$  voľný.

Poznámka. Vo výrokovej logike poznáme algoritmus (tabuľkovú metódu), na základe ktorého o každej formule vieme rozhodnúť, či je alebo nie je tautológia. V predikátovej logike takáto metóda neexistuje. Príčina je v tom, že pre výrovkovu logiku existuje interpretácia v boolovskej algebre  $\mathcal{B}_2$ , kým formula predikátovej logiky je tautológiou len vtedy, keď je pravdivá v každej interpretácii a v každej množine, teda aj v nekonečnej. Druhý spôsob ako zistiť, či formula výrokovej logiky je tautológia, dáva veta o úplnosti výrokovej logiky. Túto druhú možnosť využijeme aj v predikátovej logike.

## 10.2 Predikátový kalkúl

Tak, ako výrovkový kalkúl, aj predikátový kalkúl je tvorený množinou formúl predikátovej logiky, ktoré sa nazývajú axiómy predikátovej logiky a dedukčnými pravidlami, ktoré slúžia na odvodzovanie dokázateľných formúl.

Ak  $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$  je formula predikátovej logiky a  $B_1, B_2, \dots, B_n$  sú formuly predikátovej logiky, tak

$$A(p_1/B_1, p_2/B_2, \dots, p_n/B_n)$$

znamená výraz, ktorý dostaneme z  $A$ , ak všade v  $A$  za  $p_i$  dosadíme formulu  $B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Je zrejmé, že tento výraz bude formulou predikátovej logiky.

**Definícia 10.8** Axiómy predikátovej logiky sú tieto formuly:

1.  $A(p_1/B_1, p_2/B_2, \dots, p_n/B_n)$ , kde  $B_1, B_2, \dots, B_n$  sú formuly predikátovej logiky a  $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$  je tautológia výrokovej logiky.

2.  $(\forall x)F(x) \Rightarrow F(t)$ , kde  $t = t(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n})$  je term a  $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}$  sú voľné pre  $x$  vo formule  $F$ .

3.  $F(t) \Rightarrow (\exists x)F(x)$ , kde  $t = t(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n})$  je term a  $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n}$  sú voľné pre  $x$  vo formule  $F$ .

**Definícia 10.9** Dedukčnými pravidlami predikátovej logiky sú schémy:

1.  $\frac{F, F \Rightarrow G}{G}$ ,
2.  $\frac{F \Rightarrow G(x)}{F \Rightarrow (\forall x)G(x)}$ ,  $x$  nie je voľná v  $F$ .
3.  $\frac{G(x) \Rightarrow F}{(\exists x)G(x) \Rightarrow F}$ ,  $x$  nie je voľná v  $F$ .

Schema 1. je pravidlo modus ponens. Schému 2. nazveme  $\mathcal{A}$  pravidlom a schému 3. nazveme  $\mathcal{E}$  pravidlom. O formule, ktorá sa v dedukčnom pravidle nachádza pod čiarou, hovoríme, že vyplýva z formuly (formúl) nad čiarou podľa príslušného dedukčného pravidla.

**Definícia 10.10** Dôkaz v predikátovej logike je taká postupnosť formúl

$$A_1, A_2, \dots, A_n,$$

že pre každé  $i = 1, 2, \dots, n$  nastáva práve jedna z možností:

1.  $A_i$  je axióma predikátovej logiky.
2. Existuje  $j, k < i$  také, že  $A_i$  vyplýva z  $A_j$  a  $A_k$  podľa pravidla modus ponens.
3. Existuje  $j < i$  také, že  $A_i$  vyplýva z  $A_j$  podľa  $\mathcal{A}$  alebo  $\mathcal{E}$  pravidla.

Formula  $F$  predikátovej logiky je dokázateľná práve vtedy, ak existuje dôkaz v predikátovej logike, ktorého posledný člen je  $F$ .  
Ak formula  $F$  je dokázateľná, budeme písať  $\vdash F$ .

**Veta 10.1** (Veta o úplnosti.) Formula predikátovej logiky je dokázateľná práve vtedy, ak je tautológia.

## 10.3 Úlohy

10.1. Nájdite obor pravdivosti predikátu

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

pre  $x, y, z \in \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ .

10.2. Nájdite obory pravdivosti predikátov:

$$Q = y \geq 2x^2, \quad x, y \in R,$$

$$S = x^2 + y^2 \leq 1, \quad x, y \in R.$$

10.3. Nájdite obory pravdivosti predikátov  $Q \wedge S$ ,  $Q \vee S$ , kde  $Q$  a  $S$  sú predikáty z predchádzajúceho príkladu.

# Literatúra

- [1] M. Bieliková, P. Návrat, *Funkcionálne a logické programovanie*, STU, Bratislava 1997.
- [2] G. Birkhof, S. MacLane: *Prehľad modernej algebry*, ALFA, Bratislava 1979.
- [3] G. Birkhof, T. O. Bartee: *Aplikovaná algebra*, ALFA, Bratislava 1981.
- [4] J. Bosák: *Grafy a ich aplikácie*, ALFA, Bratislava 1980.
- [5] M. Bučko: *Grafy*, ALFA, Bratislava 1985.
- [6] M. Bučko, M. Klešč: *Diskrétna matematika*, Academic Press *elfa, s.r.o.*, Košice 1999.
- [7] L. Bukovský, *Úvod do matematickej logiky*, ÚMV PF UPJŠ, Košice 2006.
- [8] M. Demlová, B. Pondělíček: *Matematická logika*, FEL ČVUT, Praha 1997.
- [9] J. Galanová, J. Bosák, J. Gatiaľ: *Algebry a grafy*, ES SVŠT, Bratislava 1987.
- [10] F. Harary: *Graph Theory*, Addison–Wesley, Reading, MA, 1969.
- [11] J. Johnsonbaugh: *Discrete Mathematics*, Macmillan Publishing Company, New York 1990.
- [12] T. Katriňák a kol.: *Algebra a teoretická aritmetika* (1), ALFA, Bratislava 1985.
- [13] O. Kolář, O. Štěpánková, M. Chytil: *Logika, algebry a grafy*, SNTL, Praha 1989.
- [14] L. Kučera: *Kombinatorické algoritmy*, SNTL, Praha 1983.
- [15] V. Kvasnička, Pospíchal J., *Matematická logika*, Slovenská technická univerzita, Bratislava 2006.
- [16] A. Legén: *Grupy, okruhy a zväzy*, ALFA, Bratislava 1980.

- [17] Z. Manna, *Matematická teórie programů*, SNTL, Praha 1981.
- [18] Z. Manna, Waldinger R., *The Logical Basis for Computer Programming*, Volume 2: *Deductive Systems*, Addison-Wesley 1990.
- [19] E. Mendelson , *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton Univ. Press 1964.
- [20] J. Matoušek, J. Nešetřil: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Nakladatelství Karolinum, Praha 2000.
- [21] J. Nečas: *Grafy a ich použití*, SNTL, Praha 1978.
- [22] J. Nešetřil: *Teorie grafů*, SNTL, Praha 1979.
- [23] J. Plesník: *Grafové algoritmy*, VEDA, Bratislava 1983.
- [24] F. P. Preparata, R. T. Yeh: *úvod do diskrétnych matematických štruktúr*, ALFA, Bratislava 1982.
- [25] K. H. Rosen: *Discrete Mathematics and Its Applications*, AT&T Information Systems, New York 1988.
- [26] J. Sedláček: *úvod do teorie grafů*, Akademie, Praha 1981.
- [27] J.R. Shoenfield , *Mathematical Logic*, Addison-Wesley 1967.
- [28] R. Smullyan , *Navěky nerozhodnuto*, Academia, Praha 2003.
- [29] A. Sochor , *Klasická matematická logika*, Karolinum, Praha 2001.
- [30] T. Šalát a kol: *Algebra a teoretická aritmetika* (2), ALFA, Bratislava 1986.
- [31] V. Švejdar, *Logika*, Academia, Praha 2002.

Titul: Grafové algoritmy a formálna logika

Učebnica

Autori: Marián Klešč, Ján Plavka

Publikované: FEI TUKE, Košice 2008, Košice

ISBN 978-80-553-0136-5