

Diskrétna matematika

Zbierka riešených a neriešených príkladov

Emília Draženská

Košice 2014

Recenzoval: Doc. RNDr. Helena Myšková, PhD.
RNDr. Štefan Schrötter, CSc.

Prvé vydanie

ISBN 978-80-553-1833-2

Za odbornú stránku učebného textu zodpovedá autor.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.
Sadzba programom pdfL^AT_EX.

Obsah

Úvod	4
1 Binárne relácie	5
1.1 Základné vlastnosti	5
2 Čiastočne usporiadané množiny a zväzy	12
2.1 Čiastočne usporiadané množiny	12
2.2 Zväzy	15
3 Booleovské funkcie	20
3.1 Ekvivalentné formuly	20
3.2 Normálny konjunktívny a normálny disjunktívny tvar	24
4 Algebraické štruktúry	36
4.1 Grupy, cyklické grupy	36
4.2 Okruhy, obory integrity, telesá a polia	42
5 Grafy	46
5.1 Základné pojmy	46
5.2 Vzdialenosť v grafe	54
5.3 Stromy a kostry	58
5.4 Hamiltonovské, eulerovské, planárne grafy	63
6 Digrafy	70
6.1 Základné pojmy	70
6.2 Stromy a kostry	73

Úvod

Táto vysokoškolská učebnica je zbierkou riešených a neriešených príkladov a sú určené predovšetkým študentom prvého ročníka bakalárskeho štúdia Fakulty elektrotechniky a informatiky Technickej univerzity v Košiciach. Má slúžiť ako pomôcka pri štúdiu predmetu Diskrétna matematika.

Učebnica sú rozdelená do šiestich kapitol. Prvá sa venuje binárnym reláciám, druhá čiastočne usporiadaným množinám a zväzom, tretia booleovským funkciami, štvrtá algebraickým štruktúram, piata teórii grafov a posledná digrafom. Každá z nich má niekoľko podkapitol. Preberané učivo je ilustrované na riešených príkladoch. Na konci každej podkapitoly sú uvedené úlohy na samostatné riešenie spolu s ich výsledkami.

Podakovanie patrí RNDr. Štefanovi Schrötterovi, CSc. a Doc. RNDr. Helene Myškovej, PhD. za cenné pripomienky, ktoré prispeli k skvalitneniu textu.

Autor

Kapitola 1

Binárne relácie

1.1 Základné vlastnosti

Binárna relácia z množiny A do množiny B je ľubovoľná podmnožina $\mathcal{R}$ karteziánskeho súčinu $A \times B$. Ak $A = B$, teda $\mathcal{R} \subset A \times A$, hovoríme, že $\mathcal{R}$ je **binárna relácia na množine A** .

Ak $(a, b) \in \mathcal{R}$, hovoríme, že prvok a je v relácii $\mathcal{R}$ s prvkom b . Zapisujeme $a\mathcal{R}b$. Analogicky namiesto $(a, b) \notin \mathcal{R}$ píšeme $a\overline{\mathcal{R}}b$.

Binárna relácia $\mathcal{R}$ na množine M sa nazýva

reflexívna práve vtedy, keď	$(\forall x \in M) x\mathcal{R}x$
symetrická práve vtedy, keď	$(\forall x, y \in M) (x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$
antisymetrická práve vtedy, keď	$(\forall x, y \in M) (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$
tranzitívna práve vtedy, keď	$(\forall x, y, z \in M) (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Relácia $\mathcal{R}$ na množine M sa nazýva **ekvivalencia** práve vtedy, keď je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Príklad 1.1.1 Na množine $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je daná relácia $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3), (4, 4), (5, 5)\}$. Určme, či relácia $\mathcal{R}$ je reflexívna, symetrická, antisymetrická alebo tranzitívna. Nájdime najmenšiu ekvivalenciu ε na množine M , ktorá obsahuje reláciu $\mathcal{R}$ a určte rozklad množiny M určený ekvivalenciou ε , ozn. $M|\varepsilon$.

Riešenie. Relácia $\mathcal{R}$ nie je reflexívna, lebo napr. pre $1 \in M$ je $(1, 1) \notin \mathcal{R}$. Relácia nie je ani symetrická, keďže $(1, 2) \in \mathcal{R}$, ale $(2, 1) \notin \mathcal{R}$.

Pretože podmienka $(x, y) \in \mathcal{R}$ a $(y, x) \in \mathcal{R}$ nie je splnená pre žiadne $x, y \in M$, implikácia $(x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, x) \in \mathcal{R} \Rightarrow x = y$ platí pre ľubovoľné $x, y \in M$, takže relácia je antisymetrická.

Nakoniec, relácia nie je ani tranzitívna, lebo $(1, 2) \in \mathcal{R}$ aj $(2, 3) \in \mathcal{R}$, ale $(1, 3) \notin \mathcal{R}$. Relácia $\mathcal{R}$ nie je ekvivalencia, lebo nie je reflexívna, symetrická ani tranzitívna. Najmenšiu ekvivalenciu ε nájdeme pridaním minimálneho počtu usporiadaných

dvojíc tak, aby vzniknutá relácia mala vlastnosti ekvivalencie. Relácia $\mathcal{R}$ bude reflexívna, ak do $\mathcal{R}$ pridáme usporiadané dvojice $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$. Po pridaní dvojíc $(2, 1), (3, 2)$ bude vzniknutá relácia aj symetrická. A nakoniec pridaním usporiadanej dvojice $(1, 3)$ (a potom nutne je nutné pridať aj $(3, 1)$) je relácia aj tranzitívna. Teda relácia $\varepsilon = \mathcal{R} \cup \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (3, 2), (1, 3), (3, 1)\}$ je reflexívna, symetrická a tranzitívna a navyše je to najmenšia relácia s týmito vlastnosťami obsahujúca reláciu $\mathcal{R}$.

Nakoniec nájdeme triedy rozkladu množiny M podľa ekvivalencie ε . Triedu rozkladu $[1]_\varepsilon$ prislúchajúcu prvku 1 tvoria všetky prvky množiny M , ktoré sú s prvkom 1 v relácii. Teda $[1]_\varepsilon = \{1, 2, 3\} = [2] = [3]$. Keďže prvok 4 je v relácii iba sám so sebou a to isté platí aj o prvku 5, $[4]_\varepsilon = \{4\}, [5]_\varepsilon = \{5\}$. Rozklad množiny M určený ekvivalenciou ε je $M | \varepsilon = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5\}\}$. ■

Príklad 1.1.2 Majme reláciu $\mathcal{R}$ na množine $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definovanú nasledovne: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x - y| \geq 3$. Vymenujme prvky relácie $\mathcal{R}$ a určíme, či je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

Riešenie. Prvkami množiny $\mathcal{R}$ sú nasledujúce usporiadané dvojice: $\mathcal{R} = \{(1, 4), (1, 5), (2, 5), (5, 2), (5, 1), (4, 1)\}$. Keďže žiaden prvok z množiny M nie je v relácii sám so sebou, daná relácia nie je reflexívna. Relácia je symetrická, pretože ak $(a, b) \in \mathcal{R}$, tak aj $(b, a) \in \mathcal{R}$. Relácia nie je antisymetrická, lebo $(1, 4) \in \mathcal{R}$ aj $(4, 1) \in \mathcal{R}$, ale $1 \neq 4$. $\mathcal{R}$ nie je ani tranzitívna, lebo $(1, 5) \in \mathcal{R}$ aj $(5, 2) \in \mathcal{R}$, ale $(1, 2) \notin \mathcal{R}$. ■

Príklad 1.1.3 Nech $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Relácia $\mathcal{R}$ na množine A je definovaná takto: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = 2x$. Vymenujme prvky relácie $\mathcal{R}$ a určíme, či je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna. Jedná sa o ekvivalenciu? Ak nie, určíme najmenšiu ekvivalenciu $\mathcal{E}$ na množine A , ktorej podmnožinou je relácia $\mathcal{R}$ a určíme rozklad množiny A určený ekvivalenciou $\mathcal{E}$.

Riešenie: Lahko vieme určiť, že prvkami množiny $\mathcal{R}$ sú usporiadané dvojice $(0, 0), (1, 2)$ a $(2, 4)$, teda $\mathcal{R} = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4)\}$.

Keďže napríklad $(1, 1) \notin \mathcal{R}$, relácia $\mathcal{R}$ nie je reflexívna. Relácia $\mathcal{R}$ nie je ani symetrická, pretože $(1, 2) \in \mathcal{R}$, ale $(2, 1) \notin \mathcal{R}$. Je antisymetrická, pretože predpoklad $(a, b) \in \mathcal{R}$ a zároveň $(b, a) \in \mathcal{R}$ platí iba pre $a = b = 0$. Relácia $\mathcal{R}$ nie je tranzitívna, lebo $(1, 2) \in \mathcal{R}$ a tiež $(2, 4) \in \mathcal{R}$, ale $(1, 4) \notin \mathcal{R}$. Relácia $\mathcal{R}$ nie je ekvivalencia, lebo nie je reflexívna ani tranzitívna.

Najmenšiu ekvivalenciu $\mathcal{E}$ nájdeme pridaním minimálneho počtu usporiadaných dvojíc tak, aby vzniknutá relácia mala vlastnosti ekvivalencie. Aby relácia $\mathcal{E}$ bola reflexívna, musíme reláciu $\mathcal{R}$ rozšíriť o usporiadané dvojice $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$. Pridaním usporiadaných dvojíc $(2, 1), (4, 2)$ vzniknutá relácia bude aj symetrická. A aby bola aj tranzitívna, pridáme usporiadané dvojice $(1, 4)$ a $(4, 1)$. Teda relácia $\mathcal{E} = \mathcal{R} \cup \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 4), (2, 1), (4, 2), (4, 1)\}$ je reflexívna, symetrická a tranzitívna. Jedná sa o najmenšiu reláciu obsahujúcu reláciu $\mathcal{R}$, ktorá je ekvivalenciou.

Teraz nájdeme rozklad množiny A podľa ekvivalencie $\mathcal{E}$. Trieda rozkladu $[1]_{\mathcal{E}}$ prislúchajúca prvku 1 obsahuje všetky prvky množiny A , ktoré sú v relácii s prvkom 1, teda $[1]_{\mathcal{E}} = \{1, 2, 4\}$. Pre prvky 2 a 4 platí $[2]_{\mathcal{E}} = [4]_{\mathcal{E}} = [1]_{\mathcal{E}}$. Prvok 0 je v relácii iba sám so sebou a podobne to platí aj pre prvok 3, teda $[0]_{\mathcal{E}} = \{0\}$, $[3]_{\mathcal{E}} = \{3\}$. Rozklad množiny A podľa ekvivalencie $\mathcal{E}$ je množina $\{\{0\}, \{3\}, \{1, 2, 4\}\}$. ■

Príklad 1.1.4 Určme, či relácia $\mathcal{R}$ na množine $\mathbb{Z}$, definovaná $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y < 1$, je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

Riešenie: Nech $x \in \mathbb{Z}$. Relácia $\mathcal{R}$ nie je reflexívna, lebo napr. pre $x = 3$ $3\mathcal{R}3$, keby $3\mathcal{R}3$, tak by $3 + 3 < 1$.

Nech $x, y \in \mathbb{Z}$. Ak $x + y < 1$, tak aj $y + x < 1$ keďže sčítanie je komutatívne. Relácia $\mathcal{R}$ je symetrická. Ak $x + y < 1$ a zároveň $y + x < 1$, tak nemusí byť $x = y$. Stačí zobrať $x = -7$ a $y = -9$. Teda relácia $\mathcal{R}$ nie je antisymetrická.

Nech $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Ak $x + y < 1$ a zároveň $y + z < 1$, tak z toho nemusí vyplývať, že $x + z < 1$. Stačí vziať $x = 2$, $y = -11$, $z = 8$. Teda relácia $\mathcal{R}$ nie je tranzitívna. ■

Príklad 1.1.5 Zistíme, či binárna relácia $\mathcal{R}$ je ekvivalencia na danej množine. Ak áno, nájdime triedy rozkladu množiny podľa ekvivalencie

a) na $\mathbb{Z} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{4}$

b) na $\mathbb{Z} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \mid y^1$

Riešenie. Relácia sa nazýva ekvivalencia práve vtedy, keď je reflexívna, symetrická a tranzitívna. Ak relácia nemá niektorú z týchto vlastností, nie je ekvivalencia.

a) Dve celé čísla x a y sú v relácii $\mathcal{R}$ práve vtedy, keď x a y majú rovnaký zvyšok po delení číslom 4.

Relácia $\mathcal{R}$ je reflexívna, lebo pre každé celé číslo x platí, že x a x majú rovnaký zvyšok po delení číslom 4.

Relácia $\mathcal{R}$ je symetrická, lebo pre ľubovoľné dve celé čísla x, y platí, že ak x aj y majú rovnaký zvyšok po delení číslom 4, tak aj y a x majú rovnaký zvyšok po delení číslom 4.

Relácia $\mathcal{R}$ je tranzitívna, lebo pre všetky celé čísla x, y, z platí, že ak x a y majú rovnaký zvyšok po delení číslom 4 a zároveň y a z majú rovnaký zvyšok po delení číslom 4, tak aj x a z majú rovnaký zvyšok po delení číslom 4.

Keďže daná relácia je ekvivalenciou, tak určíme rozklad množiny $\mathbb{Z}$ určený touto reláciou. Najprv napíšeme triedu ekvivalencie $[k]_{\mathcal{R}}$ pre nejaké $k \in \mathbb{Z}$.

$$[k]_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{Z}; x\mathcal{R}k\} = \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv k \pmod{4}\}.$$

¹ $\mid$ je relácia deliteľnosti celých čísel. Celé číslo x delí celé číslo y ($x \mid y$) práve vtedy, keď existuje číslo $k \in \mathbb{Z}$ také, že $y = kx$.

V tejto množine sú teda všetky celé čísla, ktoré majú rovnaký zvyšok po delení 4 ako číslo k . Teda $[k]_{\mathcal{R}} = \{\dots, k-12, k-8, k-4, k, k+4, k+8, k+12, \dots\}$. Označme túto množinu $\bar{k}$. Dosadíme za k konkrétne čísla.

$$[0]_{\mathcal{R}} = \{\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\} = \{4l; l \in \mathbb{Z}\} = \bar{0}.$$

$$[1]_{\mathcal{R}} = \{\dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \dots\} = \{4l+1; l \in \mathbb{Z}\} = \bar{1}.$$

$$[2]_{\mathcal{R}} = \{\dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \dots\} = \{4l+2; l \in \mathbb{Z}\} = \bar{2}.$$

$$[3]_{\mathcal{R}} = \{\dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \dots\} = \{4l+3; l \in \mathbb{Z}\} = \bar{3}.$$

Množiny $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ tvoria rozklad množiny $\mathbb{Z}$. Označme množinu tried ekvivalencie $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Množina $\mathbb{Z}_4$ sa nazýva množinou všetkých zvyškových tried množiny $\mathbb{Z}$ podľa modulu 4.

- b) relácia nie je ekvivalencia, lebo nie je symetrická (napr. 1 delí 2, ale 2 nedelí 1). ■

Vo všeobecnosti, ak $m \in \mathbb{N}$, tak množina $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$, kde $\bar{k} = \{\dots, k-3m, k-2m, k-m, k, k+m, k+2m, k+3m, \dots\}$ ², sa nazýva množina všetkých zvyškových tried množiny $\mathbb{Z}$ podľa modulu m .

Úlohy

1.1 Nech $A = \{1, 2\}$ a $B = \{-1, 0, 1\}$. Nájdite prvky relácie $\mathcal{R}$ z množiny A do množiny B , ktorá je definovaná $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a \geq b+1$.

1.2 Majme množiny $A = \{x : x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{y : y \in \mathbb{N}, y \leq 5\}$. Nájdite reláciu $\mathcal{R}$ z množiny A do množiny B , ktorá je definovaná $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x+y \leq 2$.

1.3 Majme reláciu $\mathcal{R}$ na množine $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ definovanú:

a) $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow 4 \mid (x - y),$

b) $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x + y = 5.$

Vypíšte prvky relácie $\mathcal{R}$.

1.4 Sú relácie $\mathcal{R}$ z predchádzajúcej úlohy reflexívne, symetrické, antisymetrické alebo tranzitívne?

1.5 Nech $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Zistite, či relácia $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A : x \mid y\}$ je reflexívna, symetrická, alebo tranzitívna.

1.6 Zistite, či existuje množina M a binárna relácia $\mathcal{R}$ na množine M , ktorá je súčasne symetrická aj antisymetrická.

1.7 Určte, či daná relácia je ekvivalencia na množine $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ak áno, nájdite triedy rozkladu.

²Pre m_1 a m_2 ($m_1 \neq m_2$) a pre konkrétne k platí, že v množinách $\mathbb{Z}_{m_1}$ a $\mathbb{Z}_{m_2}$ sú množiny $\bar{k}$ rôzne.

a) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1)\},$

b) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 2 \mid (x - y).$

1.8 Na množine $M = \{1, 2, 3, 4\}$ sú dané relácie $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$. Určte, ktoré z nich sú reflexívne, symetrické, antisymetrické alebo tranzitívne. Nájdite najmenšiu ekvivalenciu ε_i na množine M , ktorá obsahuje reláciu $\mathcal{R}_i$ pre $i = 1, 2, 3$.

a) $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\},$

b) $\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\},$

c) $\mathcal{R}_3 = \{(1, 2), (2, 3)\}.$

1.9 Zistite, či nasledujúce binárne relácie sú reflexívne, symetrické, antisymetrické alebo tranzitívne. Rozhodnite, ktoré z relácií $\mathcal{R}$ sú ekvivalencie a nájdite príslušné triedy rozkladu.

a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \mid y\},$

b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \mid y \vee y \mid x\},$

c) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : y = x + 3\},$

d) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : y = x^2\},$

e) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \equiv y \pmod{4}\},$

f) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \cdot y \equiv 1 \pmod{2}\},$

g) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y \geq 2000\},$

h) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + 3y < 10\},$

i) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + y \text{ je párne}\},$

j) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + y \text{ je nepárne}\},$

k) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 4x \equiv y \pmod{3}\},$

l) $\mathcal{R} \text{ na } \mathbb{N} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \text{nsd}(x, y) = 1,$

m) $\mathcal{R} \text{ na } \mathbb{Z} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x - y| \geq 1,$

n) $\mathcal{R} \text{ na } \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x - y| \leq 1.$

1.10 Zistite, či relácie $\mathcal{R}$ na množine $\mathbb{N}$ sú ekvivalencie. Ak áno, nájdite príslušný rozklad množiny $\mathbb{N}$ určený touto reláciou.

a) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y,$

b) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y^2,$

c) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 3 \mid (x + y),$

d) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{5},$

e) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y$ je párne,

f) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \mid (y + 3).$

Výsledky

1.1 $\mathcal{R} = \{(1, -1), (1, 0), (2, -1), (2, 0), (2, 1)\}.$

1.2 $\mathcal{R} = \{(-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (0, 1), (0, 2), (1, 1)\}.$

1.3 a) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 6), (2, 2), (2, 7), (6, 1), (7, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7)\},$
 b) $\mathcal{R} = \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\}.$

- 1.4 a) Je reflexívna, symetrická aj tranzitívna, nie je antisymetrická.
 b) Je symetrická a tranzitívna, nie je reflexívna ani antisymetrická.

1.5 Je reflexívna aj tranzitívna, nie je symetrická.

1.6 $M = \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y.$

1.7 a) áno, $\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}\},$
 b) áno, $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}\}.$

1.8 a) je reflexívne, antisymetrická aj tranzitívna, nie je symetrická,
 $\varepsilon_1 = \mathcal{R}_1 \cup \{(2, 1)\},$
 b) nie je ani reflexívna ani symetrická ani antisymetrická ani tranzitívna,
 $\varepsilon_2 = \mathcal{R}_2 \cup \{(2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3)\},$
 b) nie je ani reflexívna ani symetrická ani tranzitívna, je iba antisymetrická,
 $\varepsilon_3 = \mathcal{R}_3 \cup \{(1, 3), (2, 1), (3, 2), (3, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}.$

- 1.9**
- a) je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická, je tranzitívna,
 - b) je reflexívna, je symetrická, je antisymetrická, je tranzitívna,
 - c) nie je reflexívna, nie je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna,
 - d) nie je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická, nie je tranzitívna,
 - e) je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna,
 - f) nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna,
 - g) nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna,
 - h) nie je reflexívna, nie je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna,
 - i) je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna,
 - j) nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna,
 - k) je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna,
 - l) nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna,
 - m) je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna,
 - n) je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna.
- 1.10**
- a) nie je ekvivalencia,
 - b) nie je ekvivalencia,
 - c) nie je ekvivalencia,
 - d) je ekvivalencia, $\mathbb{N} = \bigcup_{i=0}^4 \{2k + i, k \in \mathbb{N}\}$,
 - e) je ekvivalencia, $\mathbb{N} = \{2k, k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$,
 - f) nie je ekvivalencia.

Kapitola 2

Čiastočne usporiadané množiny a zväzy

2.1 Čiastočne usporiadané množiny

Binárna relácia $\mathcal{R}$ na množine A , ktorá je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna, sa nazýva **čiastočným usporiadaním** na množine A . Potom usporiadaná dvojica $(A, \mathcal{R})$ sa nazýva **čiastočne usporiadaná množina**.

Nech $(A, \mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina.

Prvok $a \in A$ sa nazýva **najmenší** prvok v $(A, \mathcal{R})$ práve vtedy, keď pre ľubovoľný prvok $x \in A$ platí, že $a\mathcal{R}x$.

Prvok $a \in A$ sa nazýva **najväčší** prvok v $(A, \mathcal{R})$ práve vtedy, keď pre ľubovoľný prvok $x \in A$ platí, že $a\mathcal{R}x$.

Prvok $a \in A$ sa nazýva **minimálny** prvok v $(A, \mathcal{R})$ práve vtedy, keď neexistuje prvok $a \neq x \in A$ taký, že $x\mathcal{R}a$.

Prvok $a \in A$ sa nazýva **maximálny** prvok v $(A, \mathcal{R})$ práve vtedy, keď neexistuje prvok $a \neq x \in A$ taký, že $a\mathcal{R}x$.

Majme $\emptyset \neq M \subset A$.

Množinou horných ohraničení množiny M nazývame množinu $h(M) = \{a \in A; (\forall x \in M : x\mathcal{R}a)\}$.

Množinou dolných ohraničení množiny M nazývame množinu $d(M) = \{a \in A; (\forall x \in M : a\mathcal{R}x)\}$.

Najmenší prvok množiny $h(M)$ sa nazýva **supremum množiny** M . Ozn. $\sup M$.

Najväčší prvok množiny $d(M)$ sa nazýva **infimum množiny** M . Ozn. $\inf M$.

Príklad 2.1.1 Je daná množina D_n všetkých nezáporných deliteľov prirodzeného čísla $n, n > 1$. Nech $\mathcal{R}$ je binárna relácia na množine D_n definovaná predpisom: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x|y$. Určme, či relácia $\mathcal{R}$ je reláciou čiastočného usporiadania na množine D_n . Ak áno, znázorníme Hasseho diagram pre $n=40$ a nájdime maximálny, minimálny, najväčší a najmenší prvok pre $(D_{40}, \mathcal{R})$.

Riešenie. Ak máme zistiť, či relácia $\mathcal{R}$ je reláciou čiastočného usporiadania, musíme overiť, či je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

Reflexívna: $\forall x \in D_n : x | x$, čo platí, relácia $|$ na D_n je reflexívna.

Antisymetrická: $\forall x, y \in D_n : x | y \wedge y | x \Rightarrow x = y$.

Z predpokladov vyplýva, že existujú prirodzené čísla k, l také, že $y = k \cdot x$ a $x = l \cdot y$.

Dostávame $y = k \cdot l \cdot y$. To platí práve vtedy, keď $k \cdot l = 1$. A z toho dostávame $k = l = 1$, teda $x = y$. Relácia $|$ na D_n je antisymetrická.

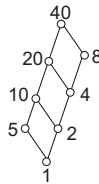
Tranzitívna: $\forall x, y, z \in D_n : x | y \wedge y | z \Rightarrow x | z$.

Z predpokladov vyplýva, že existujú prirodzené čísla k, l také, že $y = k \cdot x$ a $z = l \cdot y$.

Dostávame $z = k \cdot l \cdot x$. Teda $x | z$. Relácia $|$ na D_n je tranzitívna.

Keďže relácia $|$ na D_n má všetky požadované vlastnosti, je reláciou čiastočného usporiadania. To znamená, že $(D_n, |)$ je čiastočne usporiadaná množina.

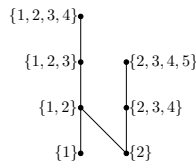
Teraz určíme delitele čísla 40 z množiny prirodzených čísel. $D_{40} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$. Hľadaný Hasseho diagram je na obrázku.



Z tohto diagramu určíme najväčší, najmenší, maximálny aj minimálny prvok. Vidíme, že najväčší prvok je rovnaký ako maximálny prvok, je to 40, najmenší prvok je ten istý ako minimálny prvok, je ním prvok 1. Čiastočne usporiadaná množina $(D_n, |)$ má vždy jediný maximálny prvok (je to číslo n), ktorý je zároveň najväčší prvok tejto čiastočne usporiadanej množiny. A tiež, $(D_n, |)$ má jediný minimálny prvok (je to číslo 1), ktorý je aj najmenším prvkom $(D_n, |)$. ■

Príklad 2.1.2 Znázorníme Hasseho diagram množiny $(M, \subseteq)^1$, kde $M = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ a nájdime jej maximálny, minimálny, najväčší a najmenší prvok. Jedná sa o čiastočne usporiadanú množinu?

Riešenie.



Maximálne prvky sú $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, minimálne prvky sú $\{1\}$, $\{2\}$. Najväčší ani najmenší prvok neexistuje.

Zistíme, či relácia $\subseteq$ je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

Reflexívna: $\forall X \in M : X \subseteq X$.

Antisymetrická: $\forall X, Y \in M : X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \Rightarrow X = Y$.

¹Niektorí autori používajú na označenie podmnožiny symbol $\subset$.

Tranzitívna: $\forall X, Y, Z \in M : X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$.

Keďže pre známu reláciu "byť podmnožinou" $\subseteq$ platia všetky tri predchádzajúce vlastnosti, je reláciou čiastočného usporiadania. To znamená, že $(M, \subseteq)$ je čiastočne usporiadaná množina. ■

Úlohy

2.1 Nech $T = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, b, c, d\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}\}$. Znázornite Hasseho diagram čiastočne usporiadanej množiny $(T, \subseteq)$. Určte:

- $\inf\{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}\},$
- $\sup\{\{a, b\}, \{b, c\}\},$
- $\inf\{\{a, b, c, d\}, \{a, b, d, e\}\},$
- $\sup\{\{a, d, e\}, \{a\}, \{d\}\},$
- $\inf\{\{a, b, c, d\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, d, e\}\},$
- $\sup\{\{a, b, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c, d\}\}.$

2.2 Zistite, či $(A, \leq)$ je čiastočne usporiadaná množina, ak $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a relácia $\leq$ je definovaná nasledovne:

- $(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a + b \leq c \wedge b \leq d,$
- $(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d.$

2.3 Nájdite najmenší, najväčší, minimálny a maximálny prvok čiastočne usporiadanej množiny $(\{5, 7, 14, 35, 140\}, |)$.

2.4 Nájdite najmenší, najväčší, minimálny a maximálny prvok čiastočne usporiadanej množiny $(\{2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 18, 36, 48\}, |)$.

Výsledky

- 2.1**
- $\{a\},$
 - $\{a, b, c\},$
 - neexistuje,
 - $\{a, e, d\},$
 - neexistuje,
 - $\{a, b, c, d\}.$

- 2.2**
- nie,
 - áno.

2.3 najmenší: neexistuje,
 najväčší: 140,
 minimálny: 5, 7,
 maximálny: 140.

2.4 najmenší: neexistuje,
 najväčší: neexistuje,
 minimálny: 2, 3,
 maximálny: 36, 48.

2.2 Zväzy

Príklad 2.2.1 Zistíme, či množina D_n spolu s reláciou $\mathcal{R}$ (z príkladu 2.1.1) je zväz.

Riešenie. Usporiadaná dvojica $(D_n, \mathcal{R})$ je zväz práve vtedy, keď sú splnené nasledujúce dve podmienky:

1. $(D_n, \mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina,
2. Pre ľubovoľné prvky $x, y \in D_n$ existuje $\sup\{x, y\} = x \vee y$ a existuje $\inf\{x, y\} = x \wedge y$.

V predchádzajúcej podkapitole sme zistili, že $(D_n, \mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina. Potrebujeme ešte zistiť, či pre každé dva prvky z D_n existuje ich supremum a infimum. Keďže množina D_n je množinou všetkých prirodzených deliteľov čísla n , $\sup\{x, y\}$ ako najmenší prvok z množiny horných ohraničení prvkov x, y v ktorej sú všetky spoločné násobky čísel x, y určíme ako ich najmenší spoločný násobok, označme $\text{nsn}\{x, y\}$. Podobnou úvahou môžeme definovať $\inf\{x, y\}$ ako $\text{nsd}\{x, y\}$ (najväčší spoločný deliteľ), keďže v množine dolných ohraničení sú spoločné delitele čísel x, y a jej najväčší prvok je $\text{nsd}\{x, y\}$. Teda $(D_n, \mathcal{R})$ je zväz. ■

Príklad 2.2.2 Zistíme, či množina čiastočne usporiadaná množina $(M, \subseteq)$ z príkladu 2.1.2 je zväz.

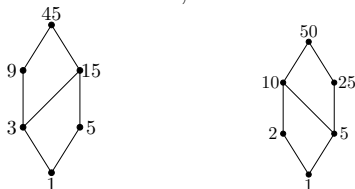
Riešenie. Keďže sa jedná o čiastočne usporiadanú množinu, stačí zistiť, či ľubovoľné dva prvky z množiny M majú supremum a infimum. Keďže množina je konečná, overíme to pomocou Hasseho diagramu. Z nášho diagramu na obr. vidíme, že prvky $\{1, 2\}$ a $\{2, 3, 4\}$ nemajú supremum. Teda sa nejedná o zväz. ■

Príklad 2.2.3 Zistite, či zväz $(D_{45}, |)$ je izomorfný so zväzom $(D_{50}, |)$.

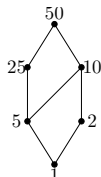
Riešenie. Zväzy $(M, \vee, \wedge)$ a $(M', \vee, \wedge)$ sú izomorfné práve vtedy, keď existuje bijektívne zobrazenie $f : M \Rightarrow M'$ tak, že pre všetky $x, y \in M$ platí $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ (i) a $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ (ii).

Hasseho diagramy izomorfných zväzov sa dajú prekresliť tak, že budú rovnaké, až na pomenovanie prvkov.

Zväzy zo zadania sú konečné, načrtnime ich Hasseho diagramy.



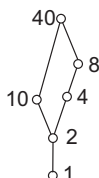
Prekreslime Hasseho diagram druhého zväzu.



Teraz pomocou týchto diagramov ľahko nájdeme bijektívne zobrazenie $f : D_{45} \Rightarrow D_{50}$, ktoré zachováva podmienky (i) a (ii): $f(1) = 1$, $f(3) = 5$, $f(5) = 2$, $f(9) = 25$, $f(15) = 10$ a $f(45) = 50$.

Príklad 2.2.4 Zistíme, či zväz $(\{1, 2, 4, 8, 10, 40\}, |)$ je distributívny, komplementárny alebo booleovský.

Riešenie. Najprv zakreslíme Hasseho diagram zadaného zväzu.



Tento zväz nie je distributívny, lebo obsahuje podzväz určený prvkami $\{2, 4, 10, 8, 40\}$, ktorý je izomorfný so zväzom N_5 . Daný zväz nie je ani komplementárny, keďže napríklad k prvku 8 neexistuje komplement. Ak by existoval komplement k prvku 8, nemohol by byť s ním v reťazci. Do úvahy by prichádzal iba prvok 10, ale $\inf\{8, 10\}$ je 2 a nie najmenší prvok 1. Keďže zväz nie je ani distributívny ani komplementárny, nie je ani booleovský. ■

Úlohy

2.1 Zistite, či $(A, |)$ je zväz, pričom:

- $A = \{1, 2, 3, 12, 30, 60\}$,
- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 20, 30, 36, 45, 90, 180\}$,

c) $A = \{2, 3, 12, 15, 18, 180\}$.

2.2 Nech $M = \{a, b, c, d\}$ a nech A je množina všetkých podmnožín množiny M , ktoré majú nepárny počet prvkov. Zistite, či $(A, \subseteq)$ tvorí zväz.

2.3 Zistite, či $(T, \subseteq)$ je zväz, ak $T = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, d, e\}\}$.

2.4 Zistite, či niektorý zo zväzov $(D_{30}, |), (D_{20}, |), (D_{105}, |), (D_{125}, |)$ je izomorfný so zväzom $(P(M), \cap, \cup)$, ak $P(M)$ je potenčná množina množiny $M = \{a, b, c\}^2$.

2.5 Zistite, či zväz $L_1 = (\{0, 1\} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \leq)$, kde $(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$ je izomorfný so zväzom $L_2 = (D_{128}, |)$.

2.6 Zistite, či zväz $L = (\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2, 3\}, \leq)$ je izomorfný so zväzom $(D_{72}, |)$.

2.7 Zistite, či zväz $L = (\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}, \leq)$ je izomorfný so zväzom $(P\{M\}, \subseteq)$, ak $M = \{a, b, c\}$.

2.8 Ktoré zo zväzov $(D_{30}, |), (D_{60}, |), (D_{100}, |), (D_{40}, |), (D_{36}, |)$ sú izomorfné?

2.9 Nech $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$. Ktoré zo zväzov $(A, \subseteq), (D_{77}, |), (D_{18}, |), (D_{20}, |), (D_{10}, |)$ sú izomorfné?

2.10 Zistite, či $(A, \subseteq)$ je podzväz zväzu $(P(X), \subseteq)$, ak $A = \{\emptyset, \{b\}, \{d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{b, d, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, d, e\}\}$ a $X = \{a, b, c, d, e\}$.

2.11 Nájdite všetky navzájom neizomorfné päťprvkové podzväzy zväzu $(A, |)$, ak

a) $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 15, 30\}$,

a) $A = D_{30}$.

2.12 Zistite, či zväz $(D_{30}, |)$ je distributívny, komplementárny alebo booleovský.

2.13 Zistite, či usporiadaná dvojica $(M, |)$ je distributívny zväz, ak $M = \{1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36\}$.

2.14 Zistite, či $(P(\{a, b, c\}), \subseteq)$ je zväz.

2.15 Zistite, či $(P(\{a, b, c\}), \cup, \cap)$ je zväz. Ak áno, zistite, či je distributívny alebo komplementárny.

2.16 Zistite, či $(P(X), \cup, \cap)$, kde X je ľubovoľná neprázdna množina, je zväz. Ak áno, zistite, či je distributívny alebo komplementárny.

2.17 Zistite, či zväz $(D_{60}, |)$ je komplementárny.

2.18 Zistite, či $(M, \mathcal{R})$ tvorí distributívny zväz, ak $M = \{2, 4, 8, 16, 64, 64^2\}$ a relácia $\mathcal{R}$ je definovaná nasledovne: $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \exists n : b = a^n$.

2.19 Daný je zväz $(A, \subseteq)$, kde $A = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c, d\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}\}$. Zistite, či platia nasledujúce tvrdenia:

²Potenčná množina množiny M je množina všetkých podmnožín množiny M .

- a) je distributívny,
- b) je komplementárny,
- c) je podzväzom zväzu $(P(X), \subseteq)$, kde $X = \{a, b, c, d, e\}$.

2.20 Zistite, či zväz

- a) $(\{1, 2, 3, 4, 9, 36\}, |)$,
- b) $(\{1, 2, 3, 5, 6, 15, 30\}, |)$,
- c) $(D_{20}, |)$,
- d) $(\{1, 5, 7, 14, 35, 140\}, |)$

je komplementárny, distributívny alebo booleovský.

Výsledky

- 2.1** a) nie,
b) nie,
c) nie.

2.2 Nie.

2.3 Nie.

2.4 Nie.

2.5 Áno, $(D_{30}, |)$.

2.6 Áno.

2.7 Áno.

2.8 Áno.

2.9 Áno.

2.10 $(A, \subseteq) \cong (D_{20}, |) \cong (D_{18}, |), (D_{77}, |) \cong (D_{10}, |)$.

2.11 Nie.

- 2.12** a) $\{1, 2, 5, 10, 30\}, \{1, 2, 3, 6, 30\}, \{1, 3, 5, 15, 30\}, \{1, 2, 6, 10, 30\}, \{1, 3, 6, 15, 30\},$
 $\{1, 5, 10, 15, 30\},$
b) $\{1, 2, 3, 6, 30\}, \{1, 3, 5, 15, 30\}, \{1, 3, 6, 15, 30\}.$

2.13 $(D_{30}, |)$ Je distributívny, komplementárny aj booleovský zväz.

2.14 $(M, |)$ Nie je ani zväz.

2.15 Áno.

2.16 Áno, je to zväz. Je distributívny aj komplementárny.

2.17 Áno, je to zväz. Je distributívny aj komplementárny.

2.18 Áno.

2.19 Je to zväz. Nie je komplementárny.

2.20 a) áno,

b) nie,

c) nie.

2.21 a) je komplementárny, nie je distributívny, nie je booleovský,

b) nie je komplementárny, je distributívny, nie je booleovský,

c) nie je komplementárny, je distributívny, nie je booleovský,

d) nie je komplementárny, je distributívny, nie je booleovský.

Kapitola 3

Booleovské funkcie

3.1 Ekvivalentné formuly

Vlastnosti pravdivostného ohodnotenia formúl zapisujeme pomocou **tabuliek pravdivostných hodnôt**.

x	$\bar{x}$	x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$
0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1

Príklad 3.1.1 Zistíme, či formuly $x \Leftrightarrow y, (\bar{x} \wedge \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$ sú ekvivalentné.

Riešenie. Označme f_1, f_2 booleovské funkcie odpovedajúce zadaným formulám. Pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt určíme hodnoty týchto funkcií.

x	y	f_1	$\bar{x} \wedge \bar{y}$	$\bar{x} \vee y$	f_2
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1

Z tabuľky vidíme, že zadané formuly sú ekvivalentné. Budeme to označovať $f_1 = f_2$. ■

Uvedme niekoľko ekvivalentných formúl.

Pre ľubovoľné booleovské formuly α, β, γ platí

1. $\alpha \wedge \alpha = \alpha, \quad \alpha \vee \alpha = \alpha,$

2. $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha, \quad \alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha,$
3. $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma, \quad \alpha \vee (\beta \vee \gamma) = (\alpha \vee \beta) \vee \gamma,$
4. $\alpha \wedge (\beta \vee \alpha) = \alpha, \quad \alpha \vee (\beta \wedge \alpha) = \alpha,$
5. $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha,$
6. $\overline{(\alpha \wedge \beta)} = (\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}), \quad \overline{(\alpha \vee \beta)} = (\overline{\alpha} \wedge \overline{\beta}),$
7. $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma), \quad \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma),$
8. $\alpha \Rightarrow \beta = \overline{\alpha} \vee \beta.$
9. $\alpha \Leftrightarrow \beta = (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha).$

Ak navyiac 1 je ľubovoľná tautológia a 0 je ľubovoľná kontradikcia, tak platí

10. $1 \wedge \alpha = \alpha, \quad 0 \wedge \alpha = 0,$
11. $1 \vee \alpha = 1, \quad 0 \vee \alpha = \alpha,$
12. $\alpha \wedge \overline{\alpha} = 0, \quad \alpha \vee \overline{\alpha} = 1.$

Príklad 3.1.2 Riešte predchádzajúci príklad úpravami formúl.

Riešenie. Vieme už, že dané formuly sú ekvivalentné. Upravme druhú formulu tak, aby sme získali prvú. $(\overline{x \wedge y}) \wedge (\overline{x \vee y}) \stackrel{6.}{=} (x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y) \stackrel{2.}{=} (\overline{y} \vee x) \wedge (\overline{x} \vee y) \stackrel{8.}{=} (y \Rightarrow x) \wedge (x \Rightarrow y) \stackrel{9.}{=} y \Leftrightarrow x$

Príklad 3.1.3 Presvedčme sa, že nasledujúce formuly sú tautológie.

- a) $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$
- b) $(\overline{y} \Rightarrow \overline{x}) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$

Riešenie. Využijeme predchádzajúce ekvivalentné formuly a zadané formuly upravíme na tautológie.

- a) $x \Rightarrow (y \Rightarrow x) \stackrel{8.}{=} x \Rightarrow (\overline{y} \vee x) \stackrel{8.}{=} \overline{x} \vee (\overline{y} \vee x) \stackrel{3.}{=} \overline{x} \vee x \vee \overline{y} \stackrel{12.}{=} 1 \vee \overline{y} \stackrel{11.}{=} 1,$
- b) $(\overline{y} \Rightarrow \overline{x}) \Rightarrow (x \Rightarrow y) \stackrel{8.}{=} (y \vee \overline{x}) \Rightarrow (\overline{x} \vee y) \stackrel{8.}{=} \overline{(y \vee \overline{x})} \vee (\overline{x} \vee y) \stackrel{6.}{=} (\overline{y} \wedge x) \vee (\overline{x} \vee y) \stackrel{7.}{=} (\overline{y} \vee \overline{x} \vee y) \wedge (x \vee \overline{x} \vee y) \stackrel{12.}{=} 1 \wedge 1 \stackrel{10.}{=} 1. \quad \blacksquare$

Príklad 3.1.4 Zjednodušte formulu $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r).$

Riešenie. Využijeme ekvivalentné formuly. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \stackrel{8.}{=} \overline{((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r))} \vee (p \Rightarrow r) \stackrel{6.}{=} \overline{(\overline{p \Rightarrow q}) \vee (\overline{q \Rightarrow r})} \vee (\overline{p} \vee r) \stackrel{8.}{=} \overline{(\overline{\overline{p} \vee q}) \vee (\overline{\overline{q} \vee r})} \vee (\overline{p} \vee r) \stackrel{6.}{=} (p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{p} \vee r) \stackrel{3.,2.}{=} (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \vee r) \stackrel{7.}{=} ((p \vee \overline{p}) \wedge (\overline{q} \vee \overline{p})) \vee ((q \vee r) \wedge (\overline{r} \vee r)) \stackrel{12.,11.}{=} (\overline{q} \vee \overline{p}) \vee (q \vee r) \stackrel{2.,3.}{=} \overline{p} \vee (\overline{q} \vee q) \vee r \stackrel{12.}{=} \overline{p} \vee 1 \vee r \stackrel{11.}{=} 1. \quad \blacksquare$

Príklad 3.1.5 Nájdime formuly ekvivalentné s formulou $(x \wedge y) \Rightarrow \bar{z}$ tak, aby obsahovali iba:

- a) negáciu a disjunkciu,
- b) negáciu a konjunkciu,
- c) negáciu a implikáciu.

Riešenie. Využitím ekvivalentných formúl upravíme zadanú formulu na požadovaný tvar.

$$a) (x \wedge y) \Rightarrow \bar{z} \stackrel{8.}{=} (\overline{(x \wedge y)}) \vee \bar{z} \stackrel{6.}{=} \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z},$$

$$b) (x \wedge y) \Rightarrow \bar{z} \stackrel{a)}{=} \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \stackrel{6.}{=} \overline{x \wedge y \wedge z},$$

$$c) (x \wedge y) \Rightarrow \bar{z} \stackrel{6.}{=} \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \Rightarrow \bar{z} \stackrel{8.}{=} (\overline{x \Rightarrow \bar{y}}) \Rightarrow \bar{z}. \quad \blacksquare$$

Úlohy

3.1 Určte, či dané formuly sú tautológie alebo kontradikcie.

- a) $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$,
- b) $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$,
- c) $(\bar{y} \Rightarrow \bar{x}) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$,
- d) $((x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})) \Leftrightarrow ((\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y))$,
- e) $((x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \wedge y) \Rightarrow z)$,
- f) $((x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$,
- g) $((x \vee y) \Rightarrow z) \Leftrightarrow (x \wedge y \wedge \bar{z})$,
- h) $(x \Leftrightarrow y) \wedge (x \Leftrightarrow z) \wedge (y \Leftrightarrow z)$.

3.2 Zistite, či nasledujúce dvojice formúl sú ekvivalentné.

- a) $x \Rightarrow y, z \wedge (\bar{y} \vee (\bar{z} \Rightarrow x))$,
- b) $(x \Rightarrow y) \vee (z \Leftrightarrow \bar{x}), z \Rightarrow (\bar{x} \vee y)$,
- c) $\bar{x} \wedge z, \bar{y} \wedge \bar{x}$,
- d) $x \Leftrightarrow y, (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$.

3.3 Nájdite formuly ekvivalentné s formulou $(x \vee y) \Rightarrow (\bar{x} \wedge z)$ tak, aby obsahovali iba:

- a) negáciu a disjunkciu,

- b) negáciu a konjunkciu,
- c) negáciu a implikáciu.

3.4 Do predajne majú priviezt tovar. Vedúci pozná isté obmedzenia, ktoré charakterizuje nasledovne:

- Ak privezú mlieko a neprivezú zeleninu, tak neprivezú ani pečivo.
- Mlieko privezú, ak privezú pečivo a neprivezú zeleninu.
- Určite privezú aspoň dva druhy tovaru.

Určte, akým spôsobom sa môže rozvoz realizovať.

Výsledky

- 3.1**
- a) tautológia,
 - b) tautológia,
 - c) tautológia,
 - d) kontradikcia,
 - e) ani tautológia ani kontradikcia,
 - f) ani tautológia ani kontradikcia,
 - g) kontradikcia,
 - h) ani tautológia ani kontradikcia.

- 3.2**
- a) nie,
 - b) áno,
 - c) nie,
 - d) áno.

- 3.3**
- a) $\overline{(x \vee y)} \vee \overline{(x \vee \bar{z})}$,
 - b) $\overline{(\bar{x} \wedge \bar{y})} \wedge \overline{(\bar{x} \wedge z)}$,
 - c) $\overline{(\bar{x} \Rightarrow y)} \Rightarrow \overline{(\bar{x} \Rightarrow \bar{z})}$.

3.4 Označme: m – „Privezú mlieko.“, z – „Privezú zeleninu.“, p – „Privezú pečivo.“. Formuly množiny $M = \{(m \wedge \bar{z}) \Rightarrow \bar{p}, (p \wedge \bar{z}) \Rightarrow m, (m \wedge z) \vee (m \wedge p) \vee \vee(p \wedge z)\}$ sú pravdivé v troch ohodnoteniach výrokových premenných, ktorým odpovedajú vety:

- privezú zeleninu a pečivo a neprivezú mlieko,
- privezú zeleninu a mlieko a neprivezú pečivo,
- privezú všetky tri druhy tovaru.

3.2 Normálny konjunktívny a normálny disjunktívny tvar

Elementárnou disjunkciou nazývame disjunkciu premenných alebo ich negácií $x_1^* \vee x_2^* \vee \dots \vee x_n^*$ (x_i^* je x_i alebo $\bar{x}_i$ pre ľubovoľné $i \in \{1, 2, \dots, n\}$). **Elementárnou konjunkciou** nazývame konjunkciu premenných alebo ich negácií $x_1^* \wedge x_2^* \wedge \dots \wedge x_n^*$. Hovoríme, že formula je v **normálnom disjunktívnom tvare** (NDT) práve vtedy, keď je disjunkciou elementárnych konjunktív. Hovoríme, že formula je v **normálnom konjunktívnom tvare** (NKT) práve vtedy, keď je konjunkciou elementárnych disjunktív.

Hovoríme, že formula α má **úplný normálny disjunktívny tvar** a formula β má **úplný normálny konjunktívny tvar** práve vtedy, keď α je v normálnom disjunktívnom tvare a β je v normálnom konjunktívnom tvare, pričom každá elementárna konjunkcia v α a každá elementárna disjunkcia v β obsahuje všetky výrokové premenné danej formuly.

Príklad 3.2.1 Nájdime formulu v úplnom normálnom disjunktívnom tvare a formulu v úplnom normálnom konjunktívnom tvare, ktoré sú realizáciou booleovskej funkcie troch premenných $f(x, y, z)$, ktorá nadobúda hodnotu 0 iba v argumentoch (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (1,0,0) (jedná sa o usporiadané trojice núl a jednotiek pre postupné ohodnotenie výrokových premenných x, y, z).

Riešenie: K takto danej booleovskej funkcii $f(x, y, z)$ môžeme napísať tabuľku pravdivostných hodnôt. Pre riadky, v ktorých booleovská funkcia $f(x, y, z)$ nadobúda hodnotu 1, napíšeme elementárne konjunktív $x^* \wedge y^* \wedge z^*$ a to tak, že

$$x^* = \begin{cases} x, & \text{ak } x = 1, \\ \bar{x}, & \text{ak } x = 0. \end{cases}$$

Rovnako postupujeme pre y^* aj z^* .

Pre riadky, v ktorých nadobúda booleovská funkcia $f(x, y, z)$ hodnotu 0, napíšeme elementárne disjunktív $x^* \vee y^* \vee z^*$ a to tak, že

$$x^* = \begin{cases} x, & \text{ak } x = 0, \\ \bar{x}, & \text{ak } x = 1. \end{cases}$$

Rovnako postupujeme pre y^* aj z^* .

x	y	z	$f(x, y, z)$	elementárna konjunkcia	elementárna disjunkcia
0	0	0	1	$\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$	
0	0	1	0		$x \vee y \vee \bar{z}$
0	1	0	1	$\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$	
0	1	1	1	$\bar{x} \wedge y \wedge z$	
1	0	0	0		$\bar{x} \vee y \vee z$
1	0	1	0		$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$
1	1	0	0		$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$
1	1	1	1	$x \wedge y \wedge z$	

Disjunciou elementárnych konjunkcií dostaneme formulu $(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee \vee(\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$, ktorá je realizáciou booleovskej funkcie $f(x, y, z)$ a je v úplnom normálnom disjunktívnom tvare.

Konjunciou elementárnych disjunktcií dostaneme formulu $(x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$, ktorá je realizáciou booleovskej funkcie $f(x, y, z)$ a je v úplnom normálnom konjunktívnom tvare. ■

Príklad 3.2.2 Napíšme v normálnom disjunktívnom tvare formulu

$$r \wedge (\bar{p} \Rightarrow (r \vee \bar{q})).$$

Riešenie: $r \wedge (\bar{p} \Rightarrow (r \vee \bar{q})) \stackrel{8.}{=} r \wedge (\bar{p} \vee (r \vee \bar{q})) \stackrel{5.}{=} r \wedge (p \vee (r \vee \bar{q})) \stackrel{4.}{=} (r \wedge p) \vee (r \wedge r) \vee (r \wedge \bar{q}) \stackrel{1.}{=} (r \wedge p) \vee r \vee (r \wedge \bar{q}).$ ■

Príklad 3.2.3 Napíšme v normálnom konjunktívnom tvare formulu

$$(p \wedge \bar{q}) \Leftrightarrow r.$$

Riešenie: $(p \wedge \bar{q}) \Leftrightarrow r \stackrel{9.}{=} ((p \wedge \bar{q}) \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow (p \wedge \bar{q})) \stackrel{8.}{=} ((\overline{(p \wedge \bar{q})} \vee r) \wedge (\bar{r} \vee (p \wedge \bar{q}))) \stackrel{6.}{=} (\bar{p} \vee q \vee r) \wedge (\bar{r} \vee p) \wedge (\bar{r} \vee \bar{q}).$ ■

V ďalšom sa budeme zaoberať určením čo najjednoduchšieho normálneho tvaru formuly, ktorá je realizáciou danej booleovskej funkcie. K tomu budeme používať **Karnaughove mapy**. Ide o prehľadný zápis hodnôt príslušnej booleovskej funkcie (namiesto klasickej tabuľky pravdivostných hodnôt) do tabuľky typu 2×2 , v prípade dvoch premenných, do tabuľky typu 2×4 , v prípade troch premenných, do tabuľky typu 4×4 , v prípade štyroch premenných.

Každé políčko prislúcha jednej n – tici ($n \in \{2, 3, 4\}$) hodnôt premenných. Platí, že dve susedné políčka v jednej tabuľke sa musia líšiť v práve jednej zložke. Teda za susedné sú považované aj oba krajné stĺpce resp. riadky.

Napr. v nasledujúcich Karnaughových mapách sú tučne vyznačené stĺpce, resp. riadky susedné.

Z takto zapísanej booleovskej funkcie vieme pomerne jednoducho vyjadriť **minimálny disjunktívny tvar** (MDT) a **minimálny konjunktívny tvar** (MKT) booleovskej funkcie. Sú to normálne tvary formuly používajúce najmenší možný počet elementárnych konjunkcií a elementárnych disjunktcií (aj premenných v nich).

Ako nájdeme minimálny disjunktívny resp. minimálny konjunktívny tvar booleovskej funkcie? Najprv hodnoty booleovskej funkcie zapíšeme do príslušnej Karnaughovej mapy. Potom združovaním (krúžkovaním) jednotiek resp. núl určíme príslušné konjunkcie resp. disjunktie. Uvedme postup pri združovaní jednotiek (pre združovanie núl platia rovnaké pravidlá). Združovanie robíme tak, aby vznikol obdĺžnik, ktorého každý rozmer je mocninou čísla 2 a obsahuje iba jednotky a to, maximálny možný počet. Každému jednému združovaniu odpovedá nejaká konjunkcia, ktorú vytvárame tak, ako sme to uviedli v predchádzajúcom príklade. Rozdiel

je iba v tom, že tieto konjunkcie nemusia obsahovať všetky premenné. Čím viac jednotiek naraz združíme, tým menej premenných obsahuje konjunkcia prislúchajúca týmto združeným jednotkám. Samozrejme, môže sa stať, že sa nedá združiť viac ako jedna jednotka. V tomto združovaní je skrytý distributívny zákon. Napríklad disjunkcia $(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y})$ je ekvivalentná s formulou x . V Karnaughovej mape pre booleovskú funkciu dvoch premenných by sme združili dve jednotky s políčkami odpovedajúcich dvojiciam 11 a 10 a napísali by sme namiesto $(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y})$ formulu x . Združovanie robíme dovtedy, kým každá jednotka nie je niekde združená, ale tiež dbáme na to, aby sme združovali vždy maximálny počet jednotiek. Nakoniec z takto získaných konjunkcií napíšeme minimálny disjunktívny tvar. Poznamenajme, že minimálne tvary nie sú jednoznačné.

Príklad 3.2.4 Nájdime minimálny disjunktívny tvar a minimálny konjunktívny tvar booleovskej funkcie

- a) $f(x, y, z)$ z príkladu 3.2.1,
- b) $f(p, q, r)$, ktorá nadobúda hodnotu jedna iba v argumentoch $(1,1,1)$ a $(0,0,1)$,
- c) $f(p, q, r, s)$, ktorá nadobúda hodnotu nula iba v argumentoch $(0,0,1,0)$, $(1,0,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$, $(1,1,0,0)$, $(1,1,0,1)$ a $(1,0,1,1)$.

Riešenie:

- a) Najprv vyriešime túto úlohu tak, že pomocou ekvivalentných formlí zjednodušíme najprv normálny konjunktívny tvar a potom normálny disjunktívny tvar danej funkcie.

$$\begin{aligned} & (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \stackrel{4.}{=} \\ & \stackrel{4.}{=} ((y \vee \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{x})) \wedge ((\bar{x} \vee z) \vee (y \wedge \bar{y})) \stackrel{12.}{=} ((y \vee \bar{z}) \vee 0) \wedge ((\bar{x} \vee z) \vee 0) \\ & \stackrel{11.}{=} (y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee z). \text{ Teda } (y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee z) \text{ je minimálny konjunktívny tvar danej booleovskej funkcie.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \stackrel{4.}{=} \\ & \stackrel{4.}{=} ((\bar{x} \wedge \bar{z}) \wedge (\bar{y} \vee y)) \vee ((y \wedge z) \wedge (\bar{x} \vee x)) \stackrel{12.}{=} ((\bar{x} \wedge \bar{z}) \wedge 1) \vee ((y \wedge z) \wedge 1) \\ & \stackrel{10.}{=} (\bar{x} \wedge \bar{z}) \vee (y \wedge z). \text{ Teda } (\bar{x} \wedge \bar{z}) \vee (y \wedge z) \text{ je minimálny disjunktívny tvar danej booleovskej funkcie.} \end{aligned}$$

Teraz riešme úlohu pomocou Karnaughovej mapy. Hodnoty booleovskej funkcie, ktoré sme v predchádzajúcom príklade zapísali do tabuľky pravdivostných hodnôt, teraz zapíšeme do Karnaughovej mapy. Najprv určíme združovaním núl, podľa predchádzajúceho postupu, minimálny konjunktívny tvar tejto booleovskej funkcie. Vytvoríme dva obdĺžniky rozmerov 1×2 , ktorým odpovedajú disjunkcie $y \vee \bar{z}$ a $\bar{x} \vee z$.

		00	10	11	01
	0	1	1	1	0
x	1	0	0	1	0

Minimálny konjunktívny tvar je $(\bar{x} \vee z) \wedge (y \vee \bar{z})$.

Teraz združovaním jednotiek určíme minimálny disjunktívny tvar. Opäť vytvoríme dva obdĺžniky rozmerov 1×2 , ktorým odpovedajú konjunkcie $\bar{x} \wedge \bar{z}$ a $y \wedge z$.

		yz			
		00	10	11	01
x	0	1	1	1	0
	1	0	0	1	0

Minimálny disjunktívny tvar je $(\bar{x} \wedge \bar{z}) \vee (y \wedge z)$.

V predchádzajúcej Karnaughovej mape, a aj v nasledujúcich, budeme pri určovaní minimálnych konjunktívnych resp. disjunktívnych tvaroch rovnakou farbou označovať disjunkcie resp. konjunkcie a im odpovedajúce zakrúžkované oblasti v Karnaughovej mape. V úlohach b) a v c) zapíšeme booleovské funkcie do príslušných Karnaughových máp a určíme minimálne disjunktívne a minimálne konjunktívne tvary pre dané booleovské funkcie.

b)

Funkcia $f(p, q, r)$ nadobúda hodnotu jedna v argumentoch $(1,1,1)$ a $(0,0,1)$, teda hodnotu nula nadobúda v argumentoch $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,0,0)$, $(0,0,0)$, $(1,1,0)$. Napíšeme oba jej normálne tvary a úpravami ich zjednodušíme.

Normálny disjunktívny tvar je $(p \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r})$. Keďže sa nedá zjednodušiť, je to aj minimálny disjunktívny tvar danej funkcie.

Normálny konjunktívny tvar je $(p \vee \bar{q} \vee r) \wedge (p \vee \bar{q} \vee \bar{r}) \wedge (\bar{p} \vee q \vee \bar{r}) \wedge (\bar{p} \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r)$.

Použijeme dvakrát distributívny zákon pre prvé dve a ďalšie dve elementárne disjunkcie, ostatné opíšeme a prvú a štvrtú elementárnu konjunkciu napíšeme ešte raz. Následne opäť formulu zjednodušíme.

$$((p \vee \bar{q}) \vee (r \wedge \bar{r})) \wedge ((\bar{p} \vee q) \vee (\bar{r} \wedge r)) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r) \wedge (p \vee \bar{q} \vee r) \wedge (\bar{p} \vee q \vee r) = (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge ((p \vee r) \vee (\bar{q} \wedge q)) \wedge ((\bar{p} \vee r) \vee (\bar{q} \wedge q)) = (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (\bar{p} \vee r) = (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge (r \vee (\bar{p} \wedge p)) = (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge r.$$

Teda $(p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge r$ je minimálny konjunktívny tvar.

Teraz nájdime minimálne tvary pomocou Karnaughovej mapy. Zapíšeme hodnoty danej booleovskej funkcie $f(p, q, r)$ do mapy.

		qr			
		00	10	11	01
p	0	0	0	0	1
	1	0	0	1	0

		qr			
		00	10	11	01
p	0	0	0	0	1
	1	0	0	1	0

Minimálny konjunktívny tvar je $(\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) \wedge r$.

Minimálny disjunktívny tvar je $(p \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r)$.

- c) Teraz použijeme iba Karnaughove mapy. Zjednodušenie booleovskej funkcie úpravami ponechávame na čitateľa.

		<i>rs</i>			
		00	10	11	01
<i>pq</i>	00	1	0	1	1
	10	0	0	0	0
	11	0	1	1	0
	01	1	1	1	1

		<i>rs</i>			
		00	10	11	01
<i>pq</i>	00	1	0	1	1
	10	0	0	0	0
	11	0	1	1	0
	01	1	1	1	1

Minimálny konjunktívny tvar je $(\bar{p} \vee q) \wedge (q \vee \bar{r} \vee s) \wedge (\bar{p} \vee r)$.

Minimálny disjunktívny tvar je $(\bar{p} \wedge \bar{r}) \vee (q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge s)$. ■

Príklad 3.2.5 Bez použitia Karnaughovej mapy nájdime minimálny disjunktívny tvar booleovskej funkcie, ktorej úplný normálny disjunktívny tvar je:

- $(x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z),$
- $(x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}),$
- $(x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}).$

Riešenie. Najprv chceme použiť distributívny zákon, teda hľadáme vždy dve elementárne konjunkcie, ktoré majú rovnaké literály. V prípade, že niektorú konjunkciu by sme potrebovali použiť viacnásobne, stačí ju do daného disjunktívneho tvaru pridať potrebný početkrát.

- Združíme elementárne konjunkcie v 1. a 3. zátvorke a v 2. a v 4. zátvorke.
 $(x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) = ((x \wedge \bar{z}) \wedge (y \vee \bar{y})) \vee ((\bar{x} \wedge z) \wedge (\bar{y} \vee y)) = (x \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge z)$
- Združíme elementárne konjunkcie v 1. a 4. zátvorke, v 2. a v 4. zátvorke a v 3. a v 5. zátvorke. Teda elementárnu konjunkciu v 4. zátvorke uvažujeme v tomto normálnom disjunktívnom tvare dvakrát.
 $(x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) = ((\bar{y} \wedge z) \wedge (x \vee \bar{x})) \vee ((\bar{x} \wedge z) \wedge (y \vee \bar{y})) \vee ((\bar{y} \wedge \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{x})) = (\bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge z) \vee (\bar{y} \wedge \bar{z})$
Teraz združíme konjunkcie v 1. a 3. zátvorke.
 $(\bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge z) \vee (\bar{y} \wedge \bar{z}) = (\bar{y} \wedge (z \vee \bar{z})) \vee (\bar{x} \wedge z) = \bar{y} \vee (\bar{x} \wedge z)$
- Združíme elementárne konjunkcie v 1. a 3. zátvorke.
 $(x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) = ((x \wedge \bar{y}) \wedge (z \vee \bar{z})) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z)$. ■

Príklad 3.2.6 Nájdime úplný normálny disjunktívny tvar a úplný normálny konjunktívny tvar booleovskej funkcie f realizovanej formulou: $(x \vee y) \Rightarrow \bar{z}$. Minimalizujeme ich.

Riešenie. Normálne tvary určíme pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt funkcie f .

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Využitím riadkov, kde $f(x, y, z) = 1$, určíme úplný normálny disjunktívny tvar funkcie f . Pre každý taký riadok nájdeme elementárnu konjunkciu. Hľadaný úplný normálny disjunktívny tvar je $(x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$.

Využitím riadkov, kde $f(x, y, z) = 0$, určíme úplný normálny konjunktívny tvar funkcie f . Pre každý taký riadok nájdeme elementárnu disjunkciu. Hľadaný úplný normálny konjunktívny tvar je $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.

Minimalizáciu urobíme najprv pomocou distributívneho zákona a potom pomocou Karnaughovej mapy.

$(x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) = (x \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) = \bar{z} \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) = \bar{z} \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$, čo je minimálny disjunktívny tvar.

$(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = \bar{z} \vee (\bar{x} \wedge (x \vee \bar{y})) = \bar{z} \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = (\bar{x} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z})$, čo je minimálny konjunktívny tvar.

Z Karnaughovej mapy ihneď získame minimálne tvary. Najprv zapíšeme zadanú funkciu f do Karnaughovej mapy.

		yz			
		00	10	11	01
x	0	1	1	0	1
	1	1	1	0	0

Najprv spojíme štyri jednotky, ktoré sú v druhom a treťom riadku a súčasne v druhom a treťom stĺpci. Ich spoločnou časťou je $z = 0$, čomu odpovedá $\bar{z}$. A tiež môžeme spojiť jednotku v poslednom riadku a poslednom stĺpci s jednotkou v druhom stĺpci a poslednom riadku. Ich spoločnou časťou je $x = y = 0$, čomu odpovedá $\bar{x} \wedge \bar{y}$. Teda hľadaný minimálny disjunktívny tvar je $\bar{z} \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$.

Teraz nájdime minimálny konjunktívny tvar. Združíme dve nuly, ktoré sú v druhom riadku. Ich spoločnou časťou je $x = z = 1$, čomu odpovedá $\bar{z} \vee \bar{x}$. A tiež môžeme združiť nuly v štvrtom stĺpci. Ich spoločnou časťou je $y = z = 1$, čomu

odpovedá $\bar{z} \vee \bar{y}$. Teda hľadaný minimálny konjunktívny tvar je $(\bar{x} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z})$. ■

Príklad 3.2.7 Linka pozostáva z 3 strojov. Zostrojme kontaktnú sieť s minimálnym počtom vypínačov tak, aby signalizovala, že nastal prípad, keď prvý stroj nepracuje a z ostatných pracuje aspoň jeden.

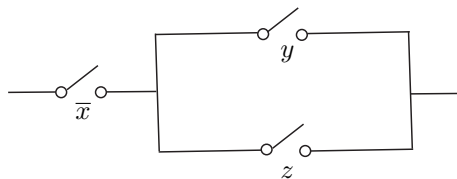
Riešenie. Premennými x, y, z označme výroky: x – prvý stroj pracuje, y – druhý stroj pracuje, z – tretí stroj pracuje. Sieťou bude prechádzať prúd práve vtedy, ak nastane niektorý z nasledujúcich prípadov:

- druhý stroj pracuje, prvý a tretí nepracujú,
- prvý a druhý stroj nepracujú, tretí pracuje,
- prvý stroj nepracuje, druhý a tretí pracujú.

Tieto prípady môžeme charakterizovať booleovskou funkciou $f(x, y, z)$, ktorá bude mať hodnotu 1 iba v prípadoch odpovedajúcim situáciám v predchádzajúcich troch prípadoch. Inak má hodnotu 0. Zapišme to do Karnaughovej mapy.

		yz			
		00	10	11	01
x	0	0	1	1	1
	1	0	0	0	0

Môžeme spojiť dve a dve jednotky v poslednom riadku, raz jednotky v treťom a štvrtom stĺpci a raz jednotky v poslednom a predposlednom stĺpci. Spoločnou časťou prvej dvojice je $x = 0, y = 1$, čomu odpovedá $\bar{x} \wedge y$. Spoločnou časťou druhej dvojice je $x = 0, z = 1$, čomu odpovedá $\bar{x} \wedge z$. Minimálny disjunktívny tvar našej funkcie je $(\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z)$, čomu zodpovedá kontaktná sieť so štyrmi vypínačmi. Ak použijeme ešte distributívny zákon, našu funkciu môžeme upraviť na jednoduchší tvar $\bar{x} \wedge (y \vee z)$, ktorý sa už nedá ďalej zjednodušiť. Počet kontaktov pre takto zapísanú funkciu sú tri. Kontaktná sieť prislúchajúca tejto booleovskej funkcii je načrtnutá na obrázku, pričom konjunkcii odpovedá sériové zapojenie a disjunktii paralelné zapojenie.



Úlohy

3.1 Nájdite úplný normálny disjunktívny tvar booleovskej funkcie realizovanej formulou φ a minimalizujte ho.

- a) $((x \vee \bar{z}) \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\bar{y} \wedge z),$
 b) $(x \Leftrightarrow \bar{y}) \Rightarrow (z \wedge \bar{x}),$
 c) $((\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge z) \Leftrightarrow u \Rightarrow (\bar{x} \wedge \bar{u}).$

3.2 Nájdite úplný normálny konjunktívny tvar booleovskej funkcie realizovanej formulou φ a minimalizujte ho.

- a) $x \Leftrightarrow (y \Rightarrow (\bar{x} \vee z)),$
 b) $(\bar{x} \Rightarrow y) \wedge \bar{z},$
 c) $(\bar{x} \wedge \overline{(z \wedge \bar{y})}) \vee u.$

3.3 Nech booleovská funkcia je daná tabuľkou. Nájdite úplný normálny konjunktívny tvar, minimalizujte ho.

x	y	z	$F(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

3.4 Nech booleovská funkcia je daná tabuľkou. Nájdite úplný normálny disjunktívny tvar a minimalizujte ho.

x	y	z	$F(x, y, z)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

3.5 Nájdite minimálny disjunktívny tvar a normálny konjunktívny tvar booleovskej funkcie, ktorej úplný normálny disjunktívny tvar je:

- a) $(x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z),$
- b) $(x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}),$
- c) $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}),$
- d) $(x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}).$

3.6 Nájdite úplný normálny disjunktívny tvar a úplný normálny konjunktívny tvar booleovskej funkcie realizovanej formulou:

- a) $(\bar{x} \Rightarrow y) \wedge x \wedge y \wedge (x \vee \bar{y}),$
- b) $z \wedge (\bar{y} \vee (\bar{z} \Rightarrow x)),$
- c) $(p \Rightarrow q) \wedge ((\bar{q} \Rightarrow r) \vee \overline{(p \wedge \bar{r})}),$
- d) $(x \Rightarrow y) \wedge z,$
- e) $(\bar{x} \Rightarrow y) \vee \bar{z},$
- f) $(x \Leftrightarrow \bar{y}) \Rightarrow (z \wedge \bar{x}),$
- g) $(\bar{x} \Rightarrow y) \Rightarrow \bar{z},$
- h) $(p \vee q \vee \bar{r}) \Leftrightarrow \bar{s}.$

3.7 Nájdite minimálny disjunktívny tvar booleovskej funkcie $f(p, q, r, s)$, ktorá nadobúda hodnotu 0 iba v argumentoch $(1,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$, $(0,0,1,1)$, $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,1)$, $(0,0,0,0)$ a $(1,1,1,0)$.

3.8 Nájdite minimálny konjunktívny tvar booleovskej funkcie $f(p, q, r, s)$, ktorá nadobúda hodnotu 1 iba v argumentoch $(0,1,0,1)$, $(1,1,1,0)$, $(1,1,0,0)$, $(0,0,1,1)$, $(0,1,1,1)$ a $(1,1,1,1)$.

3.9 Nájdite minimálny disjunktívny tvar a minimálny konjunktívny tvar booleovskej funkcie realizovanej formulou:

- a) $(x \Leftrightarrow (y \vee \bar{z})) \Rightarrow ((\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge \bar{z}),$
- b) $((x \Rightarrow \bar{z}) \wedge y) \Leftrightarrow (\bar{x} \vee \bar{y}),$
- c) $[(\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge z \Leftrightarrow u] \Rightarrow (\bar{x} \wedge \bar{u}).$

3.10 Linka pozostáva z 3 strojov. Zostrojte kontaktnú sieť a pomocou booleovskej algebry ju maximálne zjednodušte tak, aby signalizovala, že nastal niektorý z nasledujúcich prípadov:

- a) prvý stroj nepracuje, ostatné stroje pracujú,
- b) prvý stroj pracuje a z ostatných dvoch iba jeden pracuje.

3.11 Linka pozostáva z 3 strojov. Zostrojte kontaktnú sieť s minimálnym počtom vypínačov tak, aby signalizovala, že nastal niektorý z nasledujúcich prípadov:

- a) len prvý stroj pracuje,
- b) len tretí stroj nepracuje,
- c) len tretí stroj pracuje,
- d) len prvý stroj nepracuje.

3.12 Linka pozostáva zo 4 strojov. Zostrojte kontaktnú sieť s minimálnym počtom vypínačov tak, aby signalizovala, že nastal niektorý z nasledujúcich prípadov:

- a) len tretí stroj nepracuje,
- b) len prvý a štvrtý stroj pracuje,
- c) len prvý pracuje,
- d) len prvý a druhý stroj pracuje,
- e) len druhý nepracuje.

Výsledky

3.1 a) $(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}),$
 $(\bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}),$

b) $(x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z),$
 $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}),$

c) $(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge \bar{u}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge u) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z \wedge \bar{u}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \wedge \bar{u}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \wedge u) \vee$
 $\vee (\bar{x} \wedge y \wedge z \wedge \bar{u}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge u) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z \wedge \bar{u}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z} \wedge u) \vee (x \wedge y \wedge z \wedge u),$
 $(\bar{x} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{z} \wedge u) \vee (\bar{x} \wedge \bar{u}) \vee (x \wedge y \wedge u) \vee (\bar{y} \wedge z \wedge \bar{u}).$

3.2 a) $(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z),$
 $x \wedge (\bar{y} \vee z),$

b) $(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}),$
 $(x \vee y) \wedge \bar{z},$

c) $(\bar{x} \vee y \vee z \vee u) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee u) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee u) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee u) \wedge (x \vee y \vee \bar{z} \vee u),$
 $(\bar{x} \vee u) \wedge (y \vee \bar{z} \vee u).$

3.3 úplný normálny konjunktívny tvar je $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}),$
 minimálny konjunktívny tvar je $(x \vee \bar{z}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z}).$

3.4 $(x \wedge \wedge y \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}),$
 $\bar{x} \vee \bar{z}.$

3.5 a) $(x \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge z),$
 $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z),$
b) $\bar{y} \vee (\bar{x} \wedge z),$
 $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z),$
c) $x \vee \bar{y} \vee z,$
 $x \vee \bar{y} \vee z,$
d) $(x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z),$
 $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z).$

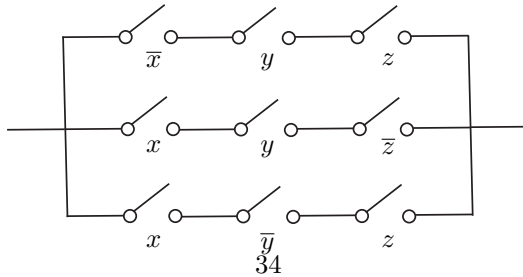
3.6 a) $(x \wedge y), (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y),$
b) $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z),$
 $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z),$
c) $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r),$
 $(\bar{p} \vee q \vee \bar{r}) \wedge (\bar{p} \vee q \vee r),$
d) $(x \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z),$
e) $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z),$
f) $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}),$
g) $(x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}),$
h) $(\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r} \wedge \bar{s}) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r} \wedge \bar{s}) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r \wedge \bar{s}) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r} \wedge \bar{s}) \vee (\bar{p} \wedge$
 $\wedge q \wedge r \wedge \bar{s}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r \wedge s) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge \bar{r} \wedge \bar{s}) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \bar{s}),$
 $(p \vee q \vee r \vee \bar{s}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r \vee \bar{s}) \wedge (\bar{p} \vee q \vee \bar{r} \vee \bar{s}) \wedge (\bar{p} \vee q \vee r \vee \bar{s}) \wedge (p \vee$
 $\vee \bar{q} \vee \bar{r} \vee \bar{s}) \wedge (p \vee q \vee \bar{r} \vee s) \wedge (p \vee \bar{q} \vee r \vee \bar{s}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r} \vee \bar{s}).$

3.7 $(\bar{p} \wedge r \wedge \bar{s}) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (q \wedge s).$

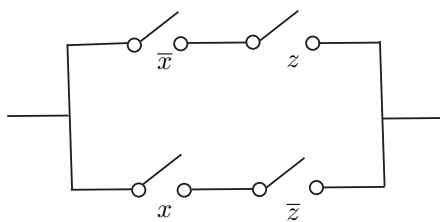
3.8 $(\bar{p} \vee r \vee \bar{s}) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r).$

3.9 a) $(x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{y} \wedge \bar{z}), (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}),$
b) $(\bar{x} \wedge y) \vee (y \wedge z), y \wedge (\bar{x} \vee z),$
c) $x \wedge \bar{y} \wedge z \wedge u, x \wedge \bar{y} \wedge z \wedge u.$

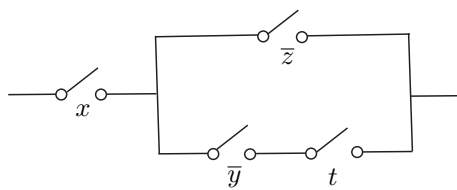
3.10



3.11



3.12



Kapitola 4

Algebraické štruktúry

4.1 Grupy, cyklické grupy

Príklad 4.1.1 Zistíme, či množina $\mathbb{Z}$ spolu s danou binárnou operáciou $\square$ tvorí grupu, ak:

a) $a \square b = a + b + 1$,

b) $a \square b = a - b + 1$.

Riešenie. Chceme ukázať, že $(\mathbb{Z}, \square)$ je grupa. Podľa definície musíme ukázať, že

1. množina $\mathbb{Z}$ je **uzavretá** vzhľadom na binárnu operáciu $\square$, t.j.
 $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \square b \in \mathbb{Z}$,
2. platí **asociatívny zákon** vzhľadom na binárnu operáciu $\square$, t.j.
 $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \square b) \square c = a \square (b \square c)$,
3. množina $\mathbb{Z}$ obsahuje **neutrálny prvok** vzhľadom na operáciu $\square$, t.j.
 $\exists e \in \mathbb{Z} \forall a \in \mathbb{Z} : a \square e = a = e \square a$,
4. ku každému prvku z množiny $\mathbb{Z}$ existuje **inverzný prvok** vzhľadom na operáciu $\square$, t.j.
 $\forall a \in \mathbb{Z} \exists a' \in \mathbb{Z} : a \square a' = e = a' \square a$.

a) Nech $a \square b = a + b + 1$.

1. $a \square b = a + b + 1 \in \mathbb{Z}$ pre ľubovoľné $a, b \in \mathbb{Z}$
Množina $\mathbb{Z}$ je uzavretá vzhľadom na binárnu operáciu $\square$.
2. $(a \square b) \square c = (a + b + 1) \square c = (a + b + 1) + c + 1 = a + b + c + 2$
 $a \square (b \square c) = a \square (b + c + 1) = a + (b + c + 1) + 1 = a + b + c + 2$
Platí asociatívny zákon vzhľadom na binárnu operáciu $\square$.
3. $a + e + 1 = a = e + a + 1$, teda $e = -1$ a $-1 \in \mathbb{Z}$
Množina $\mathbb{Z}$ obsahuje neutrálny prvok vzhľadom na operáciu $\square$.

4. $a + a' + 1 = -1 = a' + a + 1$, teda $a' = -2 - a, -2 - a \in \mathbb{Z}$
 Ku každému prvku z množiny $\mathbb{Z}$ existuje inverzný prvok vzhľadom na operáciu $\square$.

Teda $(\mathbb{Z}, \square)$ je grupa.

b) Nech $a \square b = a - b + 1$.

1. $a \square b = a - b + 1 \in \mathbb{Z}$ Množina $\mathbb{Z}$ je uzavretá vzhľadom na binárnu operáciu $\square$.
2. $(a \square b) \square c = (a - b + 1) \square c = (a - b + 1) - c + 1 = a - b - c + 2$
 $a \square (b \square c) = a \square (b - c + 1) = a - (b - c + 1) + 1 = a - b + c$

Keďže $(a \square b) \square c \neq a \square (b \square c)$, neplatí asociatívny zákon vzhľadom na binárnu operáciu $\square$, teda $(\mathbb{Z}, \square)$ nie je grupa. ■

Príklad 4.1.2 Nájdime mocniny $2^0, 2^5$ a 2^{-5} v grupe

- a) $(\mathbb{Z}, +)$,
- b) $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$.

Riešenie. Nech $(G, *)$ je grupa a nech $n \in \mathbb{Z}$. Pre ľubovoľný prvok $x \in G$ definujeme **mocninu** x^n nasledovne:

$$x^n = \begin{cases} \overbrace{x * x * x * \dots * x}^{n\text{-krát}}, & \text{ak } n > 0, \\ e, & \text{ak } n = 0, \\ \underbrace{x' * x' * x' * \dots * x'}_{(-n)\text{-krát}}, & \text{ak } n < 0. \end{cases}$$

Teda najprv potrebujeme zistiť neutrálne prvky a inverzný prvok k prvku 2 v oboch grupách zo zadania.

- a) V grupe $(\mathbb{Z}, +)$ je neutrálny prvok 0. Inverzným prvkom k 2 je -2. Potom $2^0 = 0, 2^5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$ a $2^{-5} = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) = -10$.
- b) V grupe $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ je neutrálny prvok 1. Inverzným prvkom k 2 je $\frac{1}{2}$. Potom $2^0 = 1, 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ a $2^{-5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$.

Príklad 4.1.3 Je grupa $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ cyklická? Ak áno, nájdime všetky jej generátory.

Riešenie. Ak v grupe $(G, *)$ existuje taký prvok $x \in G$, že každý prvok množiny G je jeho mocninou, tak grupa sa nazýva **cyklická** a prvok x je **generátorom** grupy.

Zistíme, či niektorý prvok množiny $\mathbb{Z}_6$ je generátorom danej grupy. Prvok $\bar{0}$ nie je generátor, pretože $\bar{0}^n = \bar{0}$ pre ľubovoľné $n \in \mathbb{Z}$. Prvok $\bar{1}$ je generátorom, pretože $\bar{1}^0 = \bar{0}$, $\bar{1}^1 = \bar{1}$, $\bar{1}^2 = \bar{2}$, $\bar{1}^3 = \bar{3}$, $\bar{1}^4 = \bar{4}$, $\bar{1}^5 = \bar{5}$, teda umocňovaním prvku $\bar{1}$ postupne získame všetky prvky množiny $\mathbb{Z}_6$. Teda, daná grupa je cyklická.

Nájďme ostatné generátory grupy. Keďže $\bar{2}^0 = \bar{0}$, $\bar{2}^1 = \bar{2}$, $\bar{2}^2 = \bar{4}$, $\bar{2}^3 = \bar{0}$, prvok $\bar{2}$ nie je generátorom. Keďže $\bar{3}^0 = \bar{0}$, $\bar{3}^1 = \bar{3}$, $\bar{3}^2 = \bar{0}$, ani prvok $\bar{3}$ nie je generátorom. Keďže $\bar{4}^0 = \bar{0}$, $\bar{4}^1 = \bar{4}$, $\bar{4}^2 = \bar{2}$, $\bar{4}^3 = \bar{0}$, ani prvok $\bar{4}$ nie je generátorom. Teraz nájdime mocniny prvku $\bar{5}$. Dostaneme $\bar{5}^0 = \bar{0}$, $\bar{5}^1 = \bar{5}$, $\bar{5}^2 = \bar{4}$, $\bar{5}^3 = \bar{3}$, $\bar{5}^4 = \bar{2}$, $\bar{5}^5 = \bar{1}$, teda každý prvok množiny $\mathbb{Z}_6$ sa dá napísať ako mocnina prvku $\bar{5}$, a $\bar{5}$ je generátor. Uvedomme si, že keď umocňujeme, mocnina môže byť aj záporná. Ale v tejto grupe, záporné mocniny jej prvkov vygenerujú rovnaké prvky ako kladné mocniny. ■

Príklad 4.1.4 Určte rády všetkých prvkov v grupe $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ a nájdime všetky podgrupy tejto grupy. Následne urobte rozklad grupy podľa jej dvojprvkovej podgrupy.

Riešenie. Rádom prvku x v grupe $(G, *)$ je najmenšie prirodzené číslo n také, že $x^n = e$. Zapisujeme rád $x = n$.

Rádom nejakého prvku $\bar{k}$ danej grupy je najmenšie prirodzené číslo n také, že $\bar{0}^n = e = \bar{0}$. Na základe riešenia predchádzajúceho príkladu vieme, že

rád $\bar{0} = 1$;

rád $\bar{1} = \text{rád } \bar{5} = 6$;

rád $\bar{3} = 2$;

rád $\bar{2} = \text{rád } \bar{4} = 3$.

Podgrupou grupy $(G, *)$ budeme nazývať dvojicu $(H, *)$, pričom $H \subset G$ a H je uzavretá vzhľadom na operáciu $*$. Všetky podgrupy cyklickej grupy sú tiež cyklické a podľa Lagrangeovej vety **rád grupy** (čo je počet prvkov grupy) je násobkom rádu podgrupy. Teda v tomto prípade podgrupy môžu mať jeden, dva tri alebo šesť prvkov. Využitím predchádzajúceho príkladu, dostávame tieto podgrupy $\{\bar{0}\}$, $\{\bar{0}, \bar{3}\}$, $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$, $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$.

Teraz nájdime rozklad grupy $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ podľa podgrupy $H = \{\bar{0}, \bar{3}\}$. Nakoľko operácia $\oplus$ je komutatívna, ľavý rozklad bude rovnaký ako pravý. trieda pravého rozkladu prislúchajúca prvku $x \in \mathbb{Z}$ je $xH = \{x \oplus h, h \in H\}$. Dostávame nasledujúce triedy rozkladu

$$\bar{0}H = \{\bar{0} \oplus \bar{0}, \bar{0} \oplus \bar{3}\} = \{\bar{0}, \bar{3}\} = \bar{3}H$$

$$\bar{1}H = \{\bar{1} \oplus \bar{0}, \bar{1} \oplus \bar{3}\} = \{\bar{1}, \bar{4}\} = \bar{4}H$$

$$\bar{2}H = \{\bar{2} \oplus \bar{0}, \bar{2} \oplus \bar{3}\} = \{\bar{2}, \bar{5}\} = \bar{5}H$$

Príklad 4.1.5 Zistite, či zobrazenie $f : (\mathbb{R}^+, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$, $f(x) = \ln x$ je homomorfizmom resp. izomorfizmom uvedených grúp.

Riešenie. Najprv zistíme, či sa jedná o homomorfizmus. Overíme, či platí:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^+) : f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$

Upravme ľavú stranu.

$$f(x \cdot y) = \ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y = f(x) + f(y),$$

teda dané zobrazenie je homomorfizmus grúp. Aby dané zobrazenie bolo izomorfizmom grúp, musí byť bijektívne, t.j. injektívne aj surjektívne. Teda, má platiť:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^+) : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

a zároveň

$$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}^+) : y = f(x).$$

Zobrazenie f je injektívne, lebo $(\forall x, y \in \mathbb{R}^+) : x \neq y \Rightarrow \ln x \neq \ln y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Ale zobrazenie f nie je surjektívne, lebo neplatí $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}^+) : y = \ln x$. Stačí zvoliť $x = e^{-y}$.

Zobrazenie f nie je izomorfizmom daných grúp. ■

Úlohy

4.1 Zistite, či množina $\mathbb{Z}$, spolu s binárnou operáciou $\square$ tvorí grupu, ak:

- a) $x \square y = x - y$,
- b) $a \square b = a + b$,
- c) $a \square b = ab$,
- d) $a \triangle b = a + b + ab$,
- e) $x \triangle y = x + y + 5$,
- f) $a \triangle b = a + (-1)^a b$,
- g) $x * y = x^2 y^2$,
- h) $a * b = ab + 1$.

4.2 Zistite, či daná množina spolu s binárnou operáciou tvorí grupu, ak:

- a) $(\mathbb{Z}_8, \oplus)$,
- b) $(\mathbb{Z}_{11} - \{\bar{0}\}, \otimes)$,
- c) $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$,
- d) $(\mathbb{Z}_n - \{\bar{0}\}, \otimes)$,
- e) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$,
- f) $(\{1, -1, i, -i\}, +)$,

g) $(S_3, \circ)$, S_3 je množina všetkých permutácií množiny $\{1, 2, 3\}$.

4.3 Zistite, či množina $A = \{x \in \mathbb{R} : x = 7^k, k \in \mathbb{Z}\}$ spolu s operáciou:

- a) sčítania,
- b) násobenia

tvorí grupu.

4.4 Zistite, či množina $A = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$ spolu s operáciou:

- a) sčítania,
- b) násobenia

tvorí grupu.

4.5 Zistite, či množina $A \subseteq \mathbb{Z}_{11}$ spolu s binárnou operáciou $\otimes$ tvorí grupu.

- a) $A = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{9}\}$,
- b) $A = \{\bar{8}, \bar{7}, \bar{5}, \bar{3}, \bar{1}\}$,
- c) $A = \{\bar{1}, \bar{8}\}$,
- d) $A = \{\bar{1}, \bar{10}\}$.

4.6 Nech $K_n = \{x \in \mathbb{C}, x^n = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Zistite, či množina K_n tvorí grupu vzhľadom na operáciu:

- a) sčítania,
- b) násobenia.

4.7 Nájdite rády prvkov:

- a) $\bar{2}, \bar{3}$ v grupe $(\mathbb{Z}_8, \oplus)$,
- b) $\bar{2}, \bar{3}$ v grupe $(\mathbb{Z}_5 - \{\bar{0}\}, \otimes)$.

4.8 Zistite, ktoré z nasledujúcich grúp sú cyklické:

$(\mathbb{R}, +)$,	$(\mathbb{Q}, +)$,	$(K_8, \cdot)$,	$(\{x \in \mathbb{R} : x = 7^k, k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$,
$(S_3, \circ)$,	$(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$,	$(\mathbb{Z}_8, \oplus)$,	$(\mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}, \otimes)$,
$(\{2^n, n \in \mathbb{N}\}, \cdot)$,	$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \oplus)$,	$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$,	$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \oplus)$.

4.9 Nájdite grupu, v ktorej každý prvok okrem neutrálneho je jej generátorom.

4.10 Zistite, či dané zobrazenie je homomorfizmom resp. izomorfizmom grúp.

- a) $f : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +), \quad f(x) = 4x,$

b) $f : (\mathbb{R}^+, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},$

c) $f : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +), \quad f(x, y) = x + y - 2.$

4.11 Zistite, ktoré z nasledujúcich grúp sú izomorfné.

$$\begin{array}{llll} (\mathbb{R}, +), & (K_6, \cdot), & (K_8, \cdot), & (\mathbb{Z}_8, \oplus), \\ (S_3, \circ), & (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot), & (\mathbb{Z}_7, \oplus), & (\mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}, \otimes), \\ (\mathbb{Z}, +), & (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus). & & \end{array}$$

4.12 Nájdite všetky podgrupy daných grúp a nájdite ich rozklady podľa ich štvor-prvkových podgrúp.

a) $(K_4, \cdot),$

b) $(\mathbb{Z}_8, \oplus).$

Výsledky

4.1 a) nie, b) áno, c) nie, d) nie,
 e) áno, f) áno, g) nie, h) nie.

4.2 a) áno, b) áno, c) áno, d) áno,
 e) áno, f) nie, g) áno.

4.3 a) nie,
 b) áno.

4.4 a) nie,
 b) áno.

4.5 a) áno,
 b) nie,
 c) nie
 d) áno.

4.6 a) nie,
 b) áno.

4.7 a) rád $\bar{2} = 4$, rád $\bar{3} = 8$,
 b) rád $\bar{2} = 4$, rád $\bar{3} = 4$.

4.8 Nasledujúce grupy sú cyklické:

$$(\{2^n, n \in \mathbb{N}\}, \cdot), \quad (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \oplus), \quad (K_8, \cdot), \quad (\mathbb{Z}_8, \oplus), \\ (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus), \quad (\mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}, \otimes), \quad (\{x \in \mathbb{R} : x = 7^k, k \in \mathbb{Z}\}, \cdot).$$

4.9 $(\mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}, \otimes)$

4.10 a) homomorfizmus,

b) izomorfizmus,

c) nie je ani homomorfizmus.

4.11 $(K_8, \cdot) \cong (\mathbb{Z}_8, \oplus)$

$$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus) \cong (K_6, \cdot) \cong (\mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}, \otimes)$$

4.12 a) $\{1\}, \{1, -1\}, \{1, -1, i, -i\},$

b) $\{\bar{0}\}, \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}, \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}.$

4.2 Okruhy, obory integrity, telesá a polia

Príklad 4.2.1 Zistite, či $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \otimes)$ tvorí okruh, obor integrity, teleso alebo pole.

Riešenie. $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \otimes)$ tvorí okruh práve vtedy, keď

1. $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ je komutatívna grupa,

2. $(\mathbb{Z}_6, \otimes)$ je pologrupa,

3. Operácia $\otimes$ je distributívna vzhľadom na operáciu $\oplus$, t.j.

$$\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_6 : \bar{x} \otimes (\bar{y} \oplus \bar{z}) = (\bar{x} \otimes \bar{y}) \oplus (\bar{x} \otimes \bar{z}), \\ (\bar{x} \oplus \bar{y}) \otimes \bar{z} = (\bar{x} \otimes \bar{z}) \oplus (\bar{y} \otimes \bar{z}).$$

Overme jednotlivé podmienky.

1. Využijeme nasledujúcu Cayleyho tabuľku na overenie toho, že $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ je komutatívna grupa.

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Z Cayleyho tabuľky vidíme, že:

- množina $\mathbb{Z}_6$ je uzavretá vzhľadom na binárnu operáciu $\oplus$,
- množina $\mathbb{Z}_6$ obsahuje neutrálny prvok $\bar{0}$ vzhľadom na operáciu $\oplus$,
- ku každému prvku $\bar{x}$ z množiny $\mathbb{Z}_6$ existuje inverzný prvok $\bar{x}'$ z množiny $\mathbb{Z}_6$ vzhľadom na operáciu $\oplus$, a to $\bar{0}' = \bar{0}$, $\bar{1}' = \bar{5}$, $\bar{2}' = \bar{4}$, $\bar{3}' = \bar{3}$, $\bar{4}' = \bar{4}$, $\bar{5}' = \bar{1}$.
- binárna operácia $\oplus$ je komutatívna.

Ešte ukážeme, že binárna operácia $\oplus$ je asociatívna, t.j. $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_6$:
 $(\bar{x} \oplus \bar{y}) \oplus \bar{z} = \bar{x} \oplus (\bar{y} \oplus \bar{z})$. Najprv upravme ľavú a potom pravú stranu.

$$(\bar{x} \oplus \bar{y}) \oplus \bar{z} = \overline{x + y + z} = \overline{x + y + z}.$$

$$\bar{x} \oplus (\bar{y} \oplus \bar{z}) = \bar{x} \oplus \overline{y + z} = \overline{x + y + z}.$$

Teda operácia $\oplus$ je asociatívna.

2. Použijeme Cayleyho tabuľku.

$\otimes$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Z Cayleyho tabuľky vidíme, že množina $\mathbb{Z}_6$ je uzavretá vzhľadom na binárnu operáciu $\otimes$.

Teraz ukážeme, že binárna operácia $\oplus$ je asociatívna, t.j. $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_6$:
 $(\bar{x} \otimes \bar{y}) \otimes \bar{z} = \bar{x} \otimes (\bar{y} \otimes \bar{z})$. Najprv upravme ľavú a potom pravú stranu.

$$(\bar{x} \otimes \bar{y}) \otimes \bar{z} = \overline{x \cdot y \cdot z} = \overline{x \cdot y \cdot z}.$$

$$\bar{x} \otimes (\bar{y} \otimes \bar{z}) = \bar{x} \otimes \overline{y \cdot z} = \overline{x \cdot y \cdot z}.$$

Teda operácia $\otimes$ je asociatívna.

3. $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_6$: $\bar{x} \otimes (\bar{y} \oplus \bar{z}) = (\bar{x} \otimes \bar{y}) \oplus (\bar{x} \otimes \bar{z})$
 $(\bar{x} \oplus \bar{y}) \otimes \bar{z} = (\bar{x} \otimes \bar{z}) \oplus (\bar{y} \otimes \bar{z})$.

V obidvoch rovniciach upravíme ľavú a pravú stranu a porovnáme ich.

$$\bar{x} \otimes (\bar{y} \oplus \bar{z}) = \bar{x} \otimes y + z = x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(\bar{x} \otimes \bar{y}) \oplus (\bar{x} \otimes \bar{z}) = \overline{x \cdot y} \oplus \overline{x \cdot z} = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(\bar{x} \oplus \bar{y}) \otimes \bar{z} = x + y \otimes z = (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

$$(\bar{x} \otimes \bar{z}) \oplus (\bar{y} \otimes \bar{z}) = \overline{x \cdot z} \oplus \overline{y \cdot z} = x \cdot z + y \cdot z.$$

Keďže platia aj distributívne zákony, $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \otimes)$ je okruh.

Okruh $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \otimes)$ tvorí obor integrity práve vtedy, keď neexistujú netriviálne delitele nuly, t.j. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_6$: $((\bar{x} \neq \bar{0} \wedge \bar{y} \neq \bar{0}) \Rightarrow \bar{x} \otimes \bar{y} \neq \bar{0})$. Zvoľme $\bar{x} = \bar{2} \wedge \bar{y} = \bar{3}$.

Potom $\bar{2} \otimes \bar{3} = \bar{0}$. Teda okruh $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \otimes)$ nie je oborom integrity. A potom nie je ani telesom ani poľom. ■

Úlohy

4.1 Zistite, či množina spolu s dvomi binárnymi operáciami $(A, +, \cdot)$ tvorí okruh, obor integrity, teleso alebo pole, ak:

- a) $A = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt[3]{2}, a, b, c \in \mathbb{Q}\}$,
- b) $A = \{a + bi, a, b \in \mathbb{Z}\}$,
- c) $A = \{a + bi, a, b \in \mathbb{Q}\}$,
- d) $A = \{a + b\sqrt[3]{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$,
- e) $A = \{x \in \mathbb{R}, x = 7^k, k \in \mathbb{Z}\}$,
- f) A je množina nepárnych celých čísel,
- g) A je množina párnych celých čísel.

4.2 Zistite, či $(\mathcal{P}(A), \div, \cap), A \neq \emptyset$ je okruh resp. pole, ak $X \div Y = (X - Y) \cup (Y - X)$.

4.3 Zistite, či $(M, +, \cdot)$ je pole, ak:

- a) $M = M_n(\mathbb{R})$,
- b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$.

4.4 Rozhodnite, či zobrazenie $\varphi(a, b) = (b, 0, a)$ je homomorfizmus resp. izomorfizmus okruhov $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ a $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, ak $+$ a $\cdot$ sú sčítanie a násobenie n - tíc po jednotlivých zložkách.

4.5 Rozhodnite, či zobrazenie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je homomorfizmom resp. izomorfizmom okruhov $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ a $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, ak:

- a) $f(x, y, z) = (x, y)$,
- b) $f(x, y, z) = (y, y)$.

Výsledky

- 4.1** a) nie je ani okruh,
b) obor integrity,
c) pole,
d) nie je ani okruh,
e) pole,
f) nie je ani okruh,
g) obor integrity.

4.2 Je to pole.

- 4.3** a) nie je,
b) je.

4.4 Je homomorfizmus.

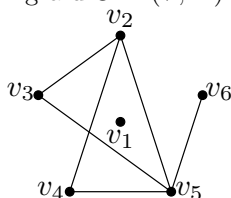
- 4.5** a) homomorfizmus,
b) homomorfizmus.

Kapitola 5

Grafy

5.1 Základné pojmy

Príklad 5.1.1 Majme diagram grafu $G = (V, H)$.



Vypíšme prvky množiny vrcholov V , množiny hrán H a napíšme stupne všetkých vrcholov.

Riešenie. Vrcholy sú označené, množina vrcholov je $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$. Každú hranu zapíšeme pomocou dvoch vrcholov, s ktorými inciduje, množina hrán daného grafu je $H = \{\{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}\}$. Stupeň vrchola je počet hrán, s ktorými inciduje, teda $\deg v_1 = 0$, $\deg v_2 = 3$, $\deg v_3 = 2$, $\deg v_4 = 2$, $\deg v_5 = 2$, $\deg v_6 = 1$. ■

Príklad 5.1.2 Nech graf $G = (V, H)$ má aspoň dva vrcholy a nech počet hrán je menší než počet vrcholov. Ukážme, že graf G má vrchol stupňa 1 alebo 0.

Riešenie. Dokážme toto tvrdenie sporom. Predpokladajme, že vrchol stupňa 1 ani vrchol stupňa 0 v grafe G neexistuje. Teda každý vrchol v_i má stupeň aspoň 2, $\deg v_i \geq 2$. Dosadíme do vzťahu $2|H| = \sum_{k=1}^{|V|} \deg v_i$ a dostaneme $2|H| \geq 2|V|$, čo je v spore s predpokladom, že graf má menej hrán než vrcholov. ■

Príklad 5.1.3 Načrtnime diagramy grafov

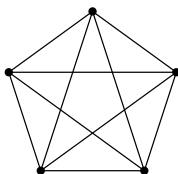
a) K_5 ,

- b) D_4 ,
- c) $K_{3,4}$,
- d) $\overline{K}_{3,4}$.

Riešenie.

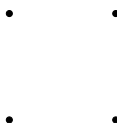
- a) Graf $K_n = (V, H)$ je kompletný graf, pričom $|V| = n$ a $|H| = \binom{n}{2}$ (každé dva vrcholy sú susedné).

Diagram grafu K_5 :



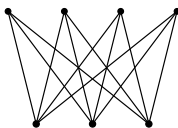
- b) Graf $D_n = (V, H)$ je diskretný graf, pričom $|V| = n$ a $|H| = 0$.

Diagram grafu D_4 :



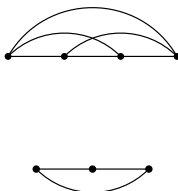
- c) Graf $K_{m,n} = (V, H)$ je kompletný bipartitný graf, kde $V = V_1 \cup V_2$, $|V_1| = m$, $|V_2| = n$ a H obsahuje všetky také hrany $\{v_i, v_j\}$, že $v_i \in V_1$ a $v_j \in V_2$.

Diagram grafu $K_{3,4}$:



- d) Graf $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{H})$ je komplement ku grafu $G = (V, H)$, čo znamená, že $\overline{V} = V$ a $\overline{H} \cap H = \emptyset$, pričom $\overline{H}$ obsahuje všetky hrany, ktoré chýbajú v grafe G k tomu, aby to bol kompletný graf.

Diagram grafu $\overline{K}_{3,4}$:



■

Príklad 5.1.4 Načrtnime diagramy

- a) všetkých podgrafov grafu K_2 ,
 b) všetkých faktorov grafu K_3 .

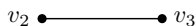
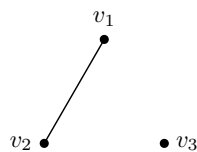
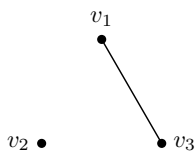
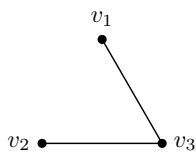
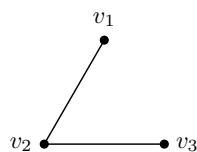
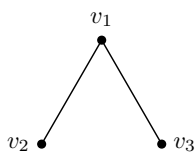
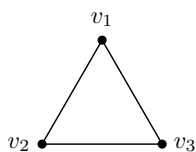
Riešenie.

- a) Podgrafom grafu $G = (V, H)$ je graf $G_1 = (V_1, H_1)$, kde $V_1 \subseteq V$ a $H_1 \subseteq H$.
 Sú štyri podgrafy grafu K_2 :



- b) Faktorom grafu $G = (V, H)$ je podgraf $G_1 = (V, H_1)$.

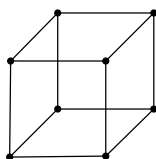
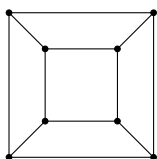
Je osem faktorov grafu K_3 :



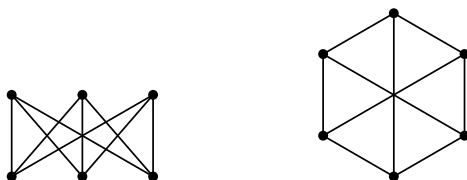
■

Príklad 5.1.5 Určme, či dané dvojice grafov sú izomorfné. Svoju odpoveď zdôvodnime .

- a)



b)



c)



d)

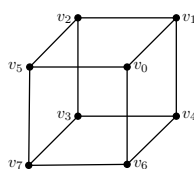


e)

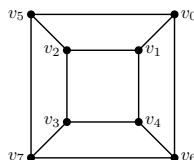


Riešenie. Grafy považujeme za izomorfné, ak sa líšia iba označením svojich vrcholov a hrán. Ak sú izomorfné, snažíme sa prekresliť diagram jedného z nich, inak hľadáme dôvod, v čom sa líšia. Grafy vľavo označme G_1 a grafy vpravo G_2 .

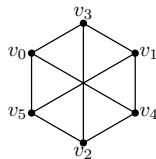
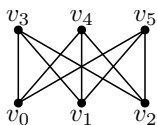
a) Grafy sú izomorfné. Najprv označme vrcholy grafu G_2



a potom prekreslíme jeho diagram nasledovne:



b) Grafy sú izomorfné. Označme vrcholy grafu G_1 a následne prekreslíme jeho diagram.



- c) Tieto grafy nie sú izomorfné, keďže v grafe G_1 neexistuje kružnica nepárnej dĺžky a v grafe G_2 je kružnica dĺžky tri.
- d) Grafy nie sú izomorfné, pretože v grafe G_1 s vrcholom stupňa tri susedia vrcholy stupňov 1, 1 a 2 a v grafe G_2 s vrcholom stupňa tri susedia vrcholy stupňov 1, 2 a 2.
- e) Ani tieto grafy nie sú izomorfné, keďže v grafe G_1 vrcholy stupňa tri nie sú susedné a v grafe G_2 vrcholy stupňa tri sú susedné.

■

Príklad 5.1.6 Určme, či sa jedná o grafovú postupnosť:

- a) 5, 8, 4, 0, 4, 3, 1, 2, 15, 2, 4, 3, 5, 2, 2,
- b) 4, 1, 2, 5, 4, 4, 2, 3,
- c) 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5.

Riešenie.

- a) Počet vrcholov nenulového stupňa je 14, teda najväčší stupeň vrchola v takomto grafe môže byť 13. Keďže vrchol stupňa 15 nemôže existovať, daná postupnosť nie je grafová.
- b) Počet vrcholov nepárneho stupňa je v každom grafe párný. Nakoľko uvedená postupnosť obsahuje tri nepárne čísla, nemôže sa jednať o grafovú postupnosť.
- c) Pre túto postupnosť použijeme viacnásobne Havlovu vetu, aby sme zistili, či sa jedná o grafovú postupnosť. Pred každým použitím uvedenej vety skontrolujeme, či postupnosť je neklesajúca. Ak nie, preusporiadame jej členy. Pokračujeme až dovtedy, kým nevieme o niektorej postupnosti s určitosťou povedať, či je alebo nie je grafová.

5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 1, 1

4, 4, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 1, 1

(použili sme Havlovu vetu)

4, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1

(preusporiadali sme členy)

3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 1, 1

(použili sme Havlovu vetu)

3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1

(preusporiadali sme členy)

2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1

(použili sme Havlovu vetu)

2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1	(preusporiadali sme členy)
1, 1, 2, 1, 1, 1, 1	(použili sme Havlovu vetu)
2, 1, 1, 1, 1, 1, 1	(preusporiadali sme členy)
0, 0, 1, 1, 1, 1	(použili sme Havlovu vetu)

O poslednej postupnosti vieme, že je grafová, keďže vieme k nej nakresliť diagram grafu



Potom aj postupnosť zo zadania je grafová. ■

Príklad 5.1.7 Pre aké x je postupnosť 4, 3, x , 2, 1 grafová?

Riešenie. Hľadaný graf má mať 5 vrcholov a súčet stupňov je párne číslo, teda x môže byť 2 alebo 4. Postupne nahradíme x týmito číslami a pomocou Havlovej vety zistíme, či sa jedná o grafovú postupnosť.

$x = 2$: 4, 3, 2, 2, 1
 2, 1, 1, 0
 0, 0, 0 Táto postupnosť je grafová.

$x = 4$: 4, 4, 3, 2, 1
 3, 2, 1, 0 Táto postupnosť nie je grafová.

Teda iba pre $x = 2$ je postupnosť 4, 3, x , 2, 1 grafová. ■

Úlohy

5.1 Nakreslite diagram ľubovoľného

- pseudografu,
- multigrafu,
- grafu.

5.2 Nech graf $G = (V, H)$ má 5 vrcholov.

- Môže graf G obsahovať súčasne vrcholy stupňa 0 a 4?
- Ak má graf G práve dva vrcholy rovnakého stupňa, môžu to byť 0, 4?
- Je možné, aby v grafe G mal každý vrchol iný stupeň?

5.3 Ukážte, že platí:

$$m \leq \frac{2|H|}{|V|} \leq M,$$

kde m je najmenší stupeň a M je najväčší stupeň vrchola v grafe $G = (V, H)$.

5.4 Nech graf $G = (V, H)$ má 15 hrán. Určte počet vrcholov, ak jeho komplement má 13 hrán.

5.5 Určte, či existuje faktor grafu K_7 taký, ktorý je izomorfný so svojim komplementom.

5.6 Určte, či sa jedná o grafovú postupnosť.

a) 2, 4, 2, 1, 2, 8, 7, 2, 4, 5, 3, 3, 0, 4,

b) 5, 5, 5, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 1

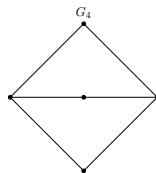
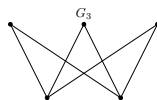
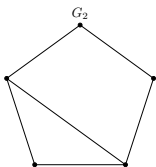
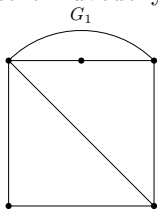
c) 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1

d) 1, 2, 2, 3, 5, 5, 5, 3

e) 8, 8, 7, 6, 6, 6, 6, 5, 5, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1

5.7 Sedem priateľov si slúbilo, že každý pošle z dovolenky pohľadnicu trom z ostatných šiestich. Je možné zariadiť korešpondenciu tak, aby každý písal len tým, od ktorých sám dostal poštu a pritom trom?

5.8 Ktoré z uvedených grafov sú izomorfné?

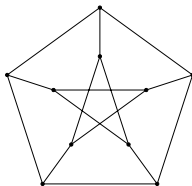


5.9 Vo futbalovom turnaji hrá 11 mužstiev. Je možné, aby v určitom čase 6 mužstiev odohralo 4 zápasy, 3 mužstvá 3 zápasy a 2 mužstvá 2 zápasy?

5.10 Načrtnite diagramy všetkých neizomorfných faktorov grafu K_4 .

5.11 Dá sa graf pravidelného osemstena rozložiť na dva neizomorfné kvadratické faktory.

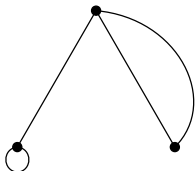
5.12 Dá sa Petersenov graf rozložiť na lineárny a kvadratický faktor?
Petersenov graf:



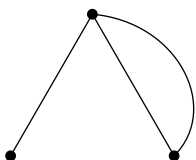
Výsledky

5.1

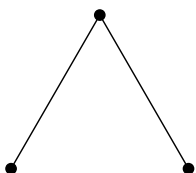
a)



b)



c)



5.2

1. Nie.

2. Nie.

3. Nie.

5.3 Platí $m \leq \deg v_i \leq M$ pre ľubovoľný vrchol v_i . Potom

$$m \cdot |V| \leq \sum_{k=1}^{|V|} \deg v_i \leq M \cdot |V|$$

$$m \cdot |V| \leq 2 \cdot |H| \leq M \cdot |V|$$

$$m \leq \frac{2|H|}{|V|} \leq M$$

5.4 8

5.5 Nie.

5.6

a) Nie.

b) Áno.

c) Áno.

d) Áno.

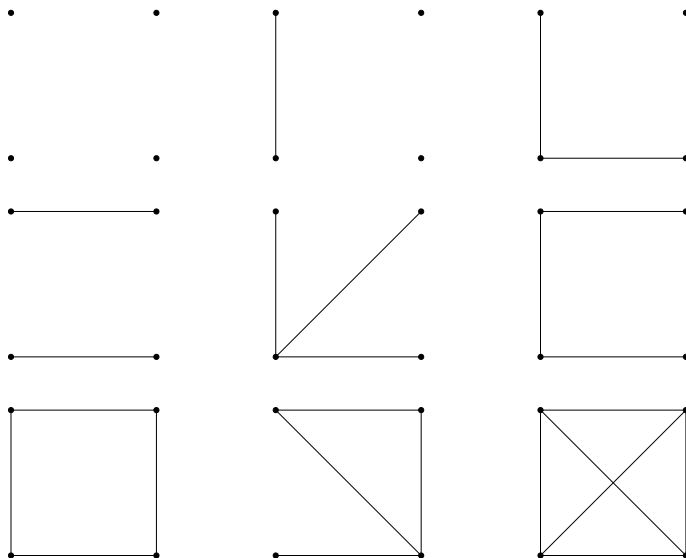
e) Áno.

5.7 Nie.

5.8 Iba G_3 a G_4 sú izomorfné.

5.9 Nie.

5.10



5.11 Áno.

5.12 Áno.

5.2 Vzdialenosť v grafe

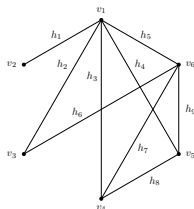
Príklad 5.2.1 Určme počet komponentov grafu

- a) K_5 ,
- b) D_4 ,
- c) $\overline{K}_{3,4}$.

Riešenie. Komponentom grafu je jeho maximálne súvislý podgraf. Využijeme diagramy týchto grafov z príkladu 5.1.3.

- a) Keďže graf K_5 je súvislý, tak má jediný maximálne súvislý podgraf, a je ním on sám.
- b) Graf D_4 nie je súvislý, má štyri maximálne súvislé podgrafy, a sú nimi jednotlivé vrcholy.
- c) Ani graf $\overline{K}_{3,4}$ nie je súvislý, má dva maximálne súvislé podgrafy, jeden je izomorfný s K_3 a druhý s K_4 . ■

Príklad 5.2.2 Pre daný graf G



napíšme maticu susednosti B a maticu incidencie A .

Riešenie. Vrcholy aj hrany máme označené, môžeme napísať obe matice.

Matica incidencie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matica susednosti:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Príklad 5.2.3 Nájdime (bez kreslenia diagramu) pomocou danej matice susednosti grafu

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

všetky dvojice vrcholov, ktorých vzdialenosť je

- a) väčšia ako 2,
- b) menšia alebo rovná ako 3,
- c) menšia ako 2,
- d) rovná 3.

Je daný graf súvislý?

Riešenie. Pripočítaním jednotkovej matice E k matici B , vytvorme maticu $B^{(1)}$

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Postupne budeme vytvárať ďalšie mocniny $B^{(k)}$ matice B podľa vzťahu $B^{(k)} = B^{(k-1)} \cdot B^{(1)}$, pričom násobenie a sčítanie je booleovské.

Platí, že prvok $b_{ij}^{(k)}$ v matici $B^{(k)}$ je 1 práve vtedy, keď vzdialenosť $d(v_i, v_j) \leq k$, resp. $b_{ij}^{(k)} = 0$ práve vtedy, keď vzdialenosť $d(v_i, v_j) > k$.

Z toho vyplýva, že graf je súvislý práve vtedy, keď v matici $B^{(|V|-1)}$ sú iba jednotky.

Postupne dostávame nasledujúce matice.

$$B^{(2)} = B^{(1)} \cdot B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B^{(3)} = B^{(2)} \cdot B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B^{(4)} = B^{(3)} \cdot B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teraz sa môžeme vrátiť k odpovediam na otázky nášho zadania.

- Vzdialenosť $d(v_i, v_j)$ je väčšia ako 2 práve vtedy, keď v matici $B^{(2)}$ je $b_{ij}^{(2)} = 0$.
Jedná sa o nasledujúce dvojice vrcholov: $\{v_1, v_4\}$, $\{v_2, v_4\}$, $\{v_2, v_6\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_5, v_6\}$.
- Vzdialenosť $d(v_i, v_j)$ je menšia alebo rovná ako 3 práve vtedy, keď v matici $B^{(3)}$ je $b_{ij}^{(3)} = 1$.
Jedná sa o všetky dvojice vrcholov okrem $\{v_2, v_4\}$ a $\{v_4, v_5\}$.

- c) Vzdialenosť $d(v_i, v_j)$ je menšia ako 2 (t. j. menšia alebo rovná ako 1) práve vtedy, keď v matici $B^{(1)}$ je $b_{ij}^{(1)} = 1$.

Jedná sa o nasledujúce dvojice vrcholov: $\{v_1, v_1\}$, $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_1, v_5\}$, $\{v_2, v_2\}$, $\{v_3, v_3\}$, $\{v_3, v_6\}$, $\{v_5, v_5\}$, $\{v_6, v_6\}$.

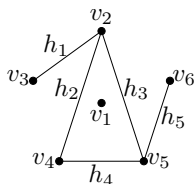
- d) Vzdialenosť $d(v_i, v_j)$ je rovná 3 (t. j. menšia alebo rovná ako 3 a zároveň väčšia ako 2) práve vtedy, keď v matici $B^{(2)}$ je $b_{ij}^{(2)} = 0$ a zároveň prvok v nasledujúcej matici $B^{(3)}$ na tej istej pozícii $b_{ij}^{(3)} = 1$.

Jedná sa o dvojice vrcholov: $\{v_1, v_4\}$, $\{v_2, v_6\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_5, v_6\}$.

Matica $B^{(4)}$ obsahuje iba jednotky, teda aj matica $B^{(5)}$ bude obsahovať iba jednotky, teda sa jedná o súvislý graf. ■

Úlohy

5.1 Pre daný graf G



napíšte maticu susednosti B a maticu incidencie A .

5.2 Nájdime pomocou matice susednosti grafu (bez kreslenia diagramu)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

všetky dvojice vrcholov, ktorých vzdialenosť je

- väčšia ako 3,
- najviac 4,
- rovná 3.

5.3 Majme daný graf pomocou matice susednosti

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bez kreslenia diagramu zistite, či daný graf je súvislý.

5.4 Nájdime všetky dvojice vrcholov, ktorých vzdialenosť je väčšia ako 2 v grafe, ktorého matica susednosti je

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Výsledky

$$5.1 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2

a) $\{v_1, v_6\}$,

b) všetky dvojice vrcholov,

c) $\{v_1, v_5\}$, $\{v_2, v_6\}$, $\{v_3, v_6\}$.

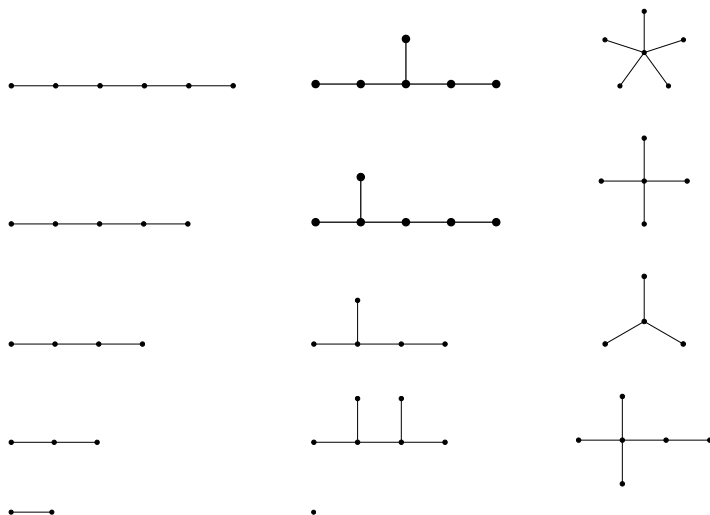
5.3 Graf nie je súvislý.

5.4 $\{v_3, v_5\}$.

5.3 Stromy a kostry

Príklad 5.3.1 Načrtnime všetky navzájom neizomorfné stromy s najviac 5 hranami.

Riešenie. Stromom je súvislý graf bez kružníc.



■

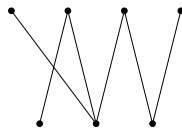
Príklad 5.3.2 Načrtáme diagram ľubovľnej kostry grafu

a) $K_{3,4}$,

b) $\overline{K}_{3,4}$.

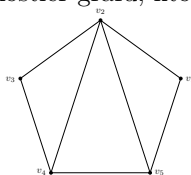
Riešenie. Kostra grafu je faktor, ktorý je stromom. Teda je to súvislý podgraf bez kružníc obsahujúci všetky vrcholy.

a) Jedna z kostier grafu $K_{3,4}$:



b) Graf $\overline{K}_{3,4}$ nemá kosťu, nakoľko to nie je súvislý graf. ■

Príklad 5.3.3 Nájdime počet kostier grafu, ktorého diagram je



Riešenie. Najprv napíšeme maticu susednosti B daného grafu a diagonálnu maticu D , ktorá má na hlavnej diagonále stupne vrcholov:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

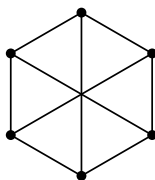
Počet kostier grafu vypočítame ako determinant matice $(D - B)_i$, čo označuje maticu, ktorú získame z matice $D - B$ odstránením i -tého riadku a i -tého stĺpca. Zvoľme $i = 2$ (obsahuje najviac nenulových prvkov).

$$\begin{aligned} \det(D - B)_2 &= \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (18 - 2 - 3) + (-6 + 1) \\ &= 21. \end{aligned}$$

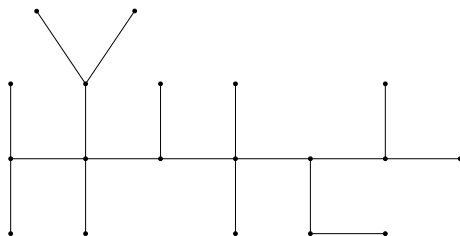
Daný graf má 21 kostier. ■

Príklad 5.3.4 Určme priemer, polomer a stred nasledujúcich grafov:

a)



b)

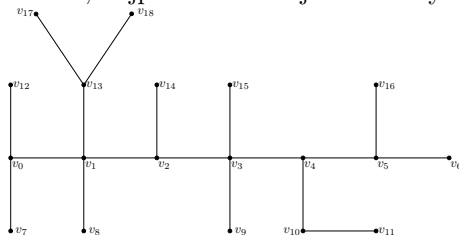


Riešenie.

- a) Vypočítame excentricitu $e(v)$ pre každý vrchol v daného grafu podľa vzťahu $e(v) = \max_{u \in V} d(v, u)$. Potom určíme priemer grafu $P(G) = \max_{v \in V} e(v)$, polomer grafu $r(G) = \min_{v \in V} e(v)$ a stredom nazývame každý vrchol v , pre ktorý platí $e(v) = r(G)$.

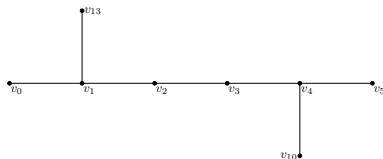
V našom grafe pre každý vrchol v je $e(v) = 2$. Teda $P(G) = r(G)$ a každý vrchol je aj stredom daného grafu.

b) Daný graf je stromom, najprv označíme jeho vrcholy.



Keďže daný graf je strom, môžeme postupovať tak, že vytvoríme grafy $G_1, G_2, \dots$ a to tak, že vždy v predchádzajúcom grafe vynecháme vrcholy stupňa 1 a aj hrany, ktoré s nimi incidujú. Vynechané vrcholy patrili k najvzdialenejším. Každým takým vynechaním sa priemer nového grafu zníži o dva a polomer o jedna. Postupujeme dovtedy, kým nezískame jednovrcholový resp. dvojvrcholový strom. Pre náš graf dostávame týmto postupom nasledujúce grafy:

G_1



G_2



G_3



Pre tento posledný graf G_3 určíme priemer, polomer a stred. $P(G_3) = r(G_3) = 1$, stredy sú oba vrcholy v_2, v_3 . Teraz určíme priemer a polomer predchádzajúcich grafov. Teda $P(G_2) = 3$, $r(G_2) = 2$, $P(G_1) = 5$, $r(G_1) = 3$ a $P(G) = 7$ a $r(G) = 4$. Stredy grafu G sú rovnaké ako stredy grafu G_3 . ■

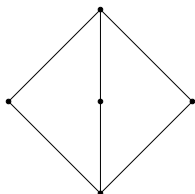
Úlohy

5.1 Aký je počet kostier grafu K_5 ?

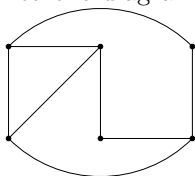
5.2 Načrtnite diagramy všetkých neizomorfných kostier grafu K_4 .

5.3 Načrtnite diagramy všetkých kostier grafu K_4 .

5.4 Nájdite počet kostier grafu, ktorého diagram je



5.5 Nájdite počet kostier grafu, ktorého diagram je



Načrtnite jednu z nich.

5.6 Nájdite počet kostier grafu, ktorého matica susednosti je

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

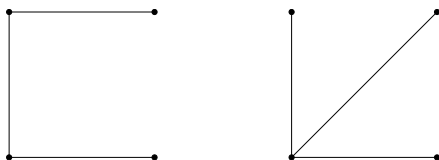
5.7 Načrtnite diagram grafu s 3 mostami a 4 artikuláciami.

5.8 Načrtnite strom, ktorý je hviezdou na 7 vrcholoch. Ktoré vrcholy sú listami?

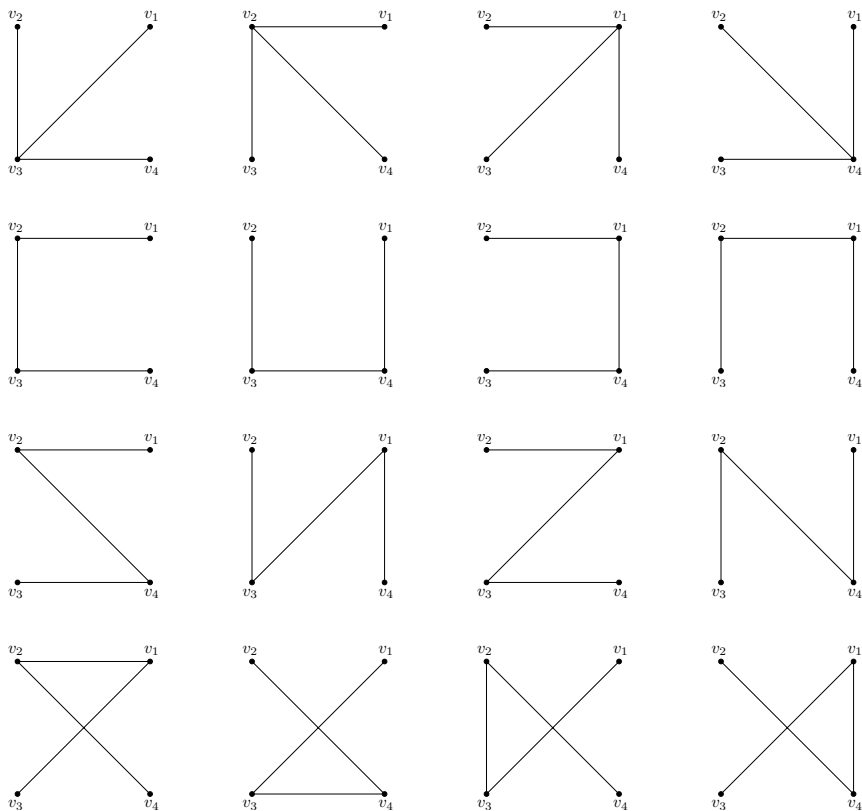
Výsledky

5.1 125

5.2 Neizomorfné kostry grafu K_4 :



5.3 Kostry grafu K_4 :



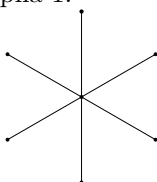
5.4 12

5.5 35

5.6 1

5.7 Ponechávame na čitateľa.

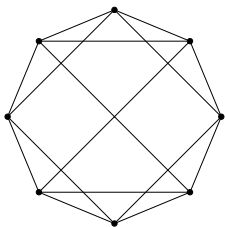
5.8 Listami sú všetky vrcholy stupňa 1.



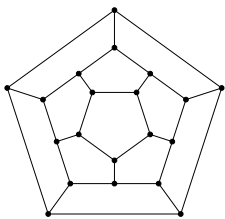
5.4 Hamiltonovské, eulerovské, planárne grafy

Príklad 5.4.1 Určme, či sa jedná o eulerovské a/alebo hamiltonovské grafy.

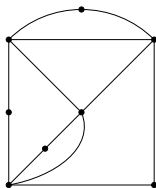
a)



b)

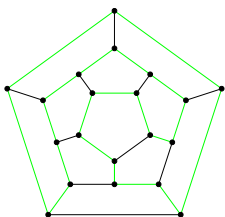


c)

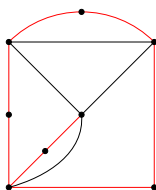


Riešenie.

- a) Každý vrchol má párny stupeň, teda graf je eulerovský. A tento graf je aj hamiltonovský, nakoľko každý vrchol má stupeň aspoň $\frac{|V|}{2}$.
- b) Graf nie je eulerovský, lebo vrcholy majú nepárne stupne. Tento graf je hamiltonovský, keďže existuje hamiltonovská kružnica (vyznačená zelenou farbou).

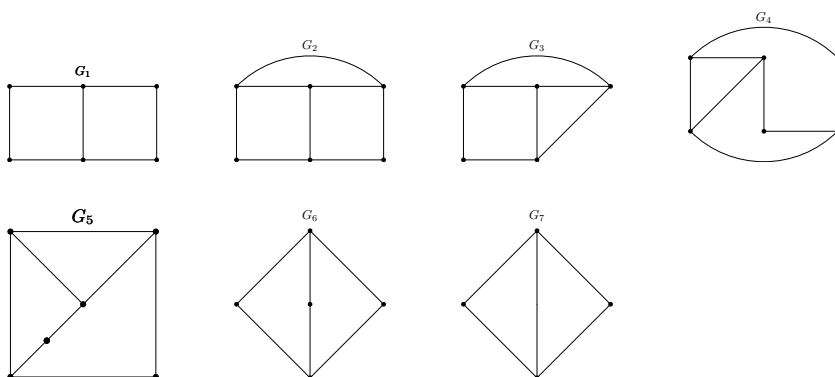


- c) Každý vrchol má párny stupeň, graf je eulerovský. Graf nie je hamiltonovský, nakoľko neexistuje hamiltonovská kružnica. Ak by existovala, musela by obsahovať všetky hrany vyznačené červenou (vďaka tomu, že graf obsahuje viacero vrcholov stupňa dva), čo nie je možné.

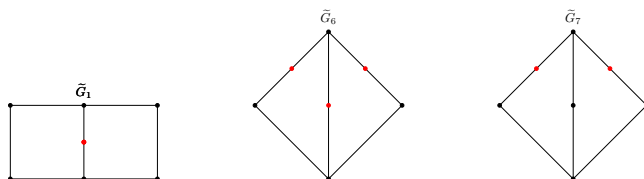


■

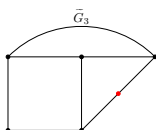
Príklad 5.4.2 Ktoré z nasledujúcich grafov sú homeomorfné?



Riešenie. Grafy G_1 , G_6 a G_7 sú homeomorfné, keďže v G_6 stačí pridať dva vrcholy stupňa dva, ktoré vzniknú rozpoltením dvoch hrán (sú vyznačené červenou farbou), v G_7 stačí pridať tri vrcholy stupňa dva, ktoré vzniknú rozpoltením troch hrán a v G_1 stačí pridať jeden vrchol stupňa dva, ktorý vznikne rozpoltením jednej hrany. Takto získané grafy budú izomorfné.



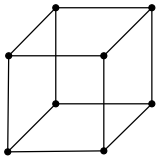
Grafy G_2 , G_3 , G_4 a G_5 sú homeomorfné, keďže G_2 , G_4 a G_5 sú izomorfné, všetky tri vznikli z K_4 rozpoltením dvoch susedných hrán a v G_3 stačí pridať jeden vrchol stupňa dva, ktorý vznikne rozpoltením jednej hrany a tým bude izomorfný s ostatnými.



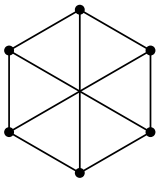
■

Príklad 5.4.3 Určme, či daný graf je planárny. Ak je planárny, prekreslime jeho diagram bez pretínania hrán, inak nájdime jeho podgraf, ktorý je homeomorfný buď s grafom $K_{3,3}$ alebo s grafom K_5 .

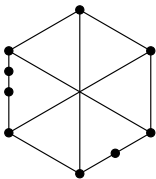
a)



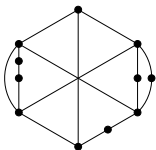
b)



c)

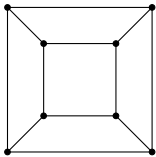


d)



Riešenie. Podľa Kuratowského vety platí, že graf je planárny práve vtedy, keď neobsahuje podgraf homeomorfný ani s $K_{3,3}$ ani s K_5 .

a) Diagram tohto grafu vieme prekresliť bez pretínania sa hrán, teda daný graf je planárny.



b) Graf je izomorfný s grafom $K_{3,3}$, teda nie je planárny.

c) Tento graf je homeomorfný s grafom $K_{3,3}$, teda tiež nie je planárny.

- d) Ani tento graf nie je planárny, keďže obsahuje podgraf (vznikne odobratím jednej hrany a jedného vrchola) homeomorfný s $K_{3,3}$. ■

Príklad 5.4.4 Ukážme, že pre ľubovoľný, súvislý, planárny graf $G = (V, H)$ platí $|H| \leq 3|V| - 6$.

Riešenie. Označme S množinu stien grafu planárneho grafu. Každá stena planárneho grafu má na obode aspoň 3 hrany, pričom každú hranu započítavame do dvoch prilahlých stien. Teda platí: $2|H| \geq 3|S|$, z čoho $\frac{2}{3}|H| \geq |S|$. Dosadíme do Eulerovho vzťahu $|H| - |V| + 2 = |S|$ a dostávame $\frac{2}{3}|H| \geq |S| = |H| - |V| + 2$. Teda $-\frac{1}{3}|H| \geq -|V| + 2$, odtiaľ $|H| \leq 3|V| - 6$. ■

Príklad 5.4.5 Pomocou predchádzajúceho príkladu 5.4.4 ukážme, že graf K_5 nie je planárny.

Riešenie. Graf K_5 má 5 vrcholov a 10 hrán. Využijeme obmenené tvrdenie príkladu 5.4.4. Keďže neplatí $10 \leq 3 \cdot 5 - 6$, tak nemôže byť planárny. ■

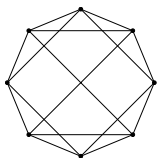
Príklad 5.4.6 Diagram pravidelného, súvislého, planárneho grafu s 30 hranami rozdeľuje rovinu na 20 oblastí. Aké sú stupne vrcholov tohto grafu?

Riešenie. Máme dané $|H| = 30$, $|S| = 20$. Pre ľubovoľný vrchol v_i je $\deg v_i = k$. Dosadíme do vzorca $2|H| = \sum_{k=1}^{|V|} \deg v_i$ a dostávame $2 \cdot 30 = k \cdot |V|$, odtiaľ $|V| = \frac{60}{k}$. Použijeme Eulerov vzorec $|S| = |H| - |V| + 2$. Potom $20 = 30 - \frac{60}{k} + 2$. Dostávame $k = 5$. Teda každý vrchol grafu má stupeň 5. ■

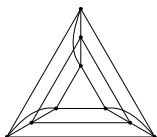
Úlohy

- 5.1** Ukážte, že pre ľubovoľný, súvislý, planárny graf bez trojuholníkov platí $|H| \leq 3|V| - 6$.
- 5.2** Pomocou predchádzajúceho príkladu ukážte, že graf $K_{3,3}$ nie je planárny.
- 5.3** Ukážte, že planárny graf, ktorého každý vrchol má stupeň 5, musí mať najmenej 12 hrán.
- 5.4** Aká je nutná a postačujúca podmienka, aby graf $K_{m,n}$ bol planárny?
- 5.5** Určte, či daný graf je planárny. Ak je planárny, prekreslite jeho diagram bez pretínania hrán, inak nájdite jeho podgraf, ktorý je izomorfný buď s $K_{3,3}$ alebo s K_5 .

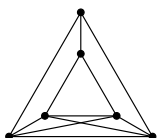
a)



b)



c)



d) K_7

5.6 Nájdite pravidelný graf stupňa 4, ktorý je planárny a má najmenší možný počet vrcholov.

5.7 Vynechajte z grafu $K_{3,3}$ resp. K_5 jednu hranu a ukážte, že je planárny.

5.8 Je Petersenov graf planárny? Svoju odpoveď zdôvodnite.

Výsledky

5.1 Keďže graf neobsahuje trojuholníky, každá stena planárneho grafu má na obode aspoň 4 hrany, pričom každú hranu započítavame do dvoch priľahlých stien. Teda platí : $2|H| \geq 4|S|$, z čoho $\frac{1}{2}|H| \geq |S|$. Dosadením do Eulerovho vzťahu dostaneme $\frac{1}{2}|H| \geq |H| - |V| + 2$. Teda $-\frac{1}{2}|H| \geq -|V| + 2$, odtiaľ $|H| \leq 2|V| - 4$.

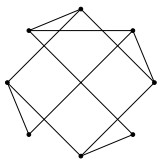
5.2 Ponechávame na čitateľa.

5.3 Ponechávame na čitateľa.

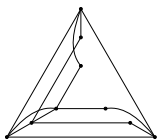
5.4 $\min\{m, n\} \leq 2$.

5.5

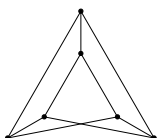
a) Nie. Obsahuje podgraf homeomorfný s $K_{3,3}$.



b) Nie. Obsahuje podgraf homeomorfný s K_5 .

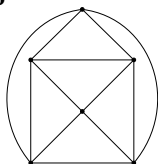


c) Nie. Obsahuje podgraf homeomorfný s $K_{3,3}$.



d) Nie. Obsahuje podgraf K_5 .

5.6



5.7 Ponechávame na čitateľa.

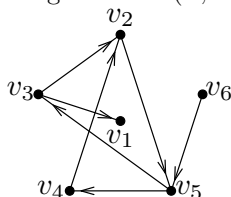
5.8 Nie.

Kapitola 6

Digrafy

6.1 Základné pojmy

Príklad 6.1.1 Majme diagram digrafu $G = (V, H)$.



Napíšme vonkajšie a vnútorné stupne všetkých vrcholov. Je niektorý vrchol rovnovážny alebo prameň alebo ústie? Napíšme nejaký sled, spojenie, orientovaný ťah, dráhu a cyklus.

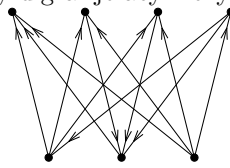
Riešenie. Množina vrcholov je $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$. Každú (orientovanú) hranu zapíšeme pomocou dvoch vrcholov, pričom prvý vrchol je začiatkový vrchol hrany a druhý vrchol je koncový vrchol hran. Množina hrán daného grafu je $H = \{(v_3, v_2), (v_4, v_2), (v_2, v_5), (v_5, v_3), (v_5, v_4), (v_6, v_5), (v_3, v_1)\}$. **Vonkajší stupeň vrchola** v , ozn. $\delta^+(v)$ je počet hrán, ktorých vrchol v je začiatkovým a **vnútorný stupeň vrchola** v , ozn. $\delta^-(v)$ je počet hrán, ktorých vrchol v je koncovým. Teda $\delta^+(v_1) = 0$, $\delta^+(v_2) = 1$, $\delta^+(v_3) = 2$, $\delta^+(v_4) = 1$, $\delta^+(v_5) = 2$, $\delta^+(v_6) = 1$ a $\delta^-(v_1) = 1$, $\delta^-(v_2) = 2$, $\delta^-(v_3) = 1$, $\delta^-(v_4) = 1$, $\delta^-(v_5) = 2$, $\delta^-(v_6) = 0$.

Vrcholy v_4, v_5 sú rovnovážné, nakoľko majú rovnaké vonkajšie a vnútorné stupne. Vrcholy v_1 je ústím, keďže má kladný iba vnútorný stupeň. Vrcholy v_6 je prameňom, lebo má kladný iba vonkajší stupeň.

Sled v digrafe je taká postupnosť vrcholov a hrán, ktorej odpovedajúca postupnosť po zrušení orientácie je sledom v grafe, napr. v_4, v_5, v_3, v_1, v_3 . **Spojenie** v digrafe je sled, v ktorom sa zachováva orientácia hrán, napr. v_5, v_4, v_2, v_5, v_4 . **Orientovaný ťah** v digrafe je spojenie, ktorému po zrušení orientácie odpovedá sled v grafe, napr. $v_4, v_5, v_3, v_2, v_5, v_6$. **Dráha** v digrafe je spojenie, ktorému po zrušení orientácie odpovedá cesta v grafe, napr. v_5, v_4, v_2, v_3, v_1 . **Cyklus** v digrafe

je uzavretá dráha, napr. v_4, v_2, v_5, v_4 . ■

Príklad 6.1.2 Určme, či daný digraf je acyklický.

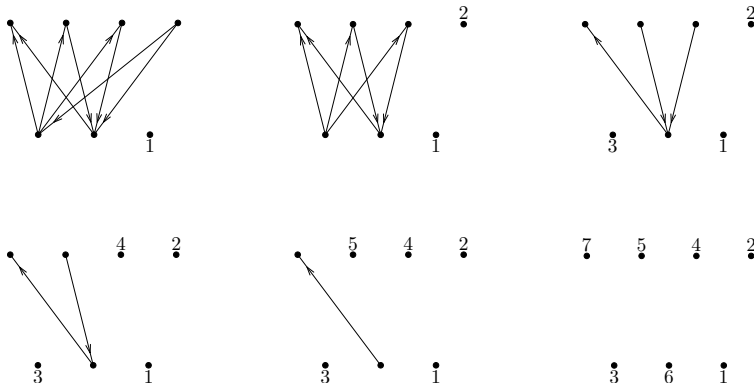


Riešenie. Digraf sa nazýva **acyklický** práve vtedy, keď neobsahuje cyklus.

Existuje nutná a postačujúca podmienka pre určenie toho, či digraf je acyklický, a to, že vrcholy digrafu vieme označiť číslami $1, 2, \dots, |V|$ tak, že každá hrana (i, j) spĺňa podmienku $i < j$.

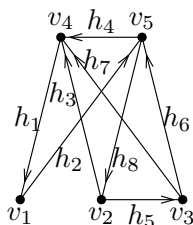
Pokúsme sa nájsť také očíslovanie. Ak vrcholy takto očísľujeme, daný digraf je acyklický. Ak také očíslovanie neexistuje, znamená to, že digraf nie je acyklický. Keďže vieme, že v acyklickom digrafe existuje prameň, budeme postupovať tak, že tento prameň očísľujeme číslom 1 a odstránime všetky hrany, ktoré z neho vychádzajú. V takto získanom digrafe opäť nájdeme prameň, dáme mu číslo 2 a znovu odstránime všetky hrany, ktoré z neho vychádzajú. Postup opakujeme, až kým nemáme očíslované všetky vrcholy resp. v niektorom ďalšom digrafe už nevieme nájsť prameň, čo znamená, že tam existuje cyklus, a teda pôvodný digraf nie je acyklický.

Predchádzajúcim postupom dostávame digrafy:



Posledný digraf neobsahuje žiadnu hranu a má všetky vrcholy očíslované, teda pôvodný digraf je acyklický. ■

Príklad 6.1.3 Pre daný digraf $\vec{G}$, ktorého diagram je



napíšme maticu susednosti B a maticu incidencie A .

Riešenie. Vrcholy aj hrany sú označené, môžeme napísať obe matice.
Matica incidencie:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matica susednosti:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Úlohy

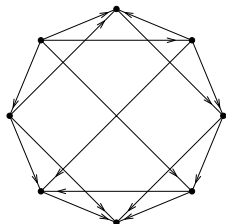
6.1 Načrtnite diagram digrafu, ktorého matica susednosti je

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

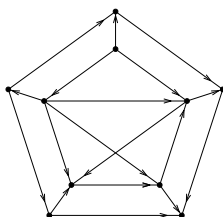
6.2 Určte, či digraf z úlohy 6.1 je silne súvislý.

6.3 Zistite, či daný digraf je acyklický:

a)

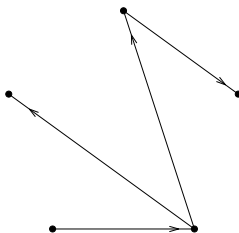


b)



6.4 Načrtnite diagramy všetkých neizomorfných súvislých digrafov na troch vrcholoch.

Výsledky



6.1

6.2 Nie je.

6.3

a) Áno.

b) Nie.

6.4

6.2 Stromy a kostry

Príklad 6.2.1 Nájdime počet všetkých rôznych kostier digrafu $\vec{G}$ z príkladu 6.1.3. Načrtnite diagram jednej z nich.

Riešenie. Počet všetkých rôznych kostier digrafu $\vec{G}$, ozn. $p(\vec{T}) = \det(A \cdot A^T)_i = \det(D - B - B^T)_i$, kde A je matica incidencie, B je matica susednosti, $D = (d_{i,i})$ je diadonálna matica s prvkami $d_{i,i} = \delta^+(v_i) + \delta^-(v_i)$, pričom $(A \cdot A^T)_i$ resp. $(D - B - B^T)_i$ je matica, vytvorená z matice $A \cdot A^T$ resp. $D - B - B^T$ vynechaním i -tého riadku a i -tého stĺpca, pre ľubovoľné $i \in$.

Vynásobme matice $A \cdot A^T =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

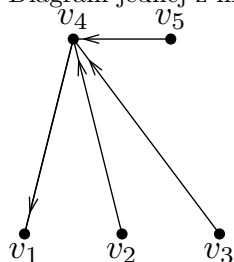
Kedže chceme vynechať i -tý riadok a i -tý stĺpec, zvolíme i tak, aby získaná matica mala čo najviac nulových prvkov. Zvolíme $i = 5$ a získaný determinant vypočítajme rozvojom podľa prvého riadku.

$$p(\vec{T}) = \det(A \cdot A^T)_5 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1) \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (36 - 1 - 1 - 3 - 3 - 4) + (-9 + 1) = 40.$$

Daný digraf má 40 rôznych kostier.

Diagram jednej z nich:



■

Príklad 6.2.2 Vypočítajme počet všetkých rôznych koreňových kostier digrafu $\vec{G}$ z príkladu 6.1.3 s koreňom

a) v_2 ,

b) v_4 .

Načrtnite všetky koreňové kostry s koreňom v_4 .

Riešenie. Počet všetkých rôznych koreňových kostier digrafu $\vec{G}$ s koreňom v_i , ozn. $p(\vec{T}_{v_i}) = \det(K_i)$, je kde $K = (k_{ij})$ je matica rádu n , kde

$$k_{ij} = \begin{cases} \delta^-(v_i) & i = j \\ b_{ij} & i \neq j, \end{cases}$$

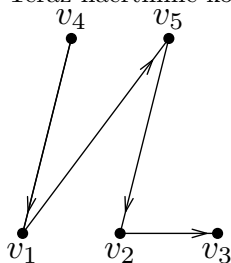
pričom K_i je matica vytvorená z matice K vynechaním i -tého riadku a i -tého stĺpca.

$$\text{Napíšme maticu } K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{a) } p(\vec{T}_{v_2}) = \det(K_2) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 6 - 1 = 5, \end{aligned}$$

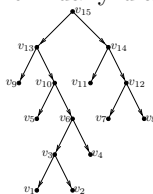
$$\text{b) } p(\vec{T}_{v_4}) = \det(K_4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Daný digraf má päť rôznych koreňových kostier s koreňom v_2 a jednu s koreňom v_4 . Teraz načrtneme koreňovú kosťu s koreňom v_4 .



■

Príklad 6.2.3 Majme binárny strom daný diagramom:



Určme, ktoré vrcholy sú listy. Vypočítajte jeho hĺbku, vonkajšiu dĺžku a vnútornú dĺžku.

Riešenie.

Koreňom tohto stromu je vrchol v_{15} .

Množina listov (vnútorných vrcholov) je $V_e = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8, v_9, v_{11}\}$.

Množina vonkajších vrcholov je $V_i = \{v_3, v_6, v_{10}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$.

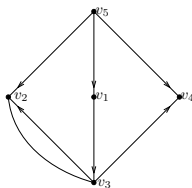
Hĺbka binárneho stromu $hl(\vec{T}_{v_{15}}) = \max_{u \in V} d(v_{15}, u) = 5$.

Vonkajšia dĺžka $E(\vec{T}_{v_{15}}) = \sum_{u \in V_e} \vec{d}(v_{15}, u) = 2 + 3 + 5 + 5 + 4 + 2 + 3 + 3 = 22$.

Vnútorná dĺžka $I(\vec{T}_{v_{15}}) = \sum_{u \in V_i} \vec{d}(v_{15}, u) = 1 + 2 + 3 + 4 + 1 + 2 = 13$. ■

Úlohy

6.1 Nájdite počet všetkých rôznych kostier digrafu $\vec{G}$, ktorého diagram je na obrázku. Načrtnite jednu z nich.

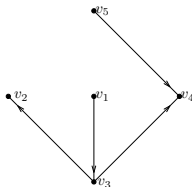


6.2 Vypočítajte počet všetkých rôznych koreňových kostier digrafu $\vec{G}$ z úlohy 6.1 s koreňom

- a) v_5 ,
- b) v_4 .

Výsledky

6.1 24.



6.2

- a) 6,
- b) 0.

Literatúra

- [1] Berežný Š., Draženská E., Kravecová D.: *Zbierka úloh z diskrétnej matematiky*, Technická univerzita, Košice 2005.
- [2] Bučko M., Klešč M.: *Diskrétna matematika*, Edičné stredisko TU, Košice 1991.
- [3] Kvasnička V., Pospíchal J.: *Matematická logika*, STU, Bratislava 2006.
- [4] Gavalec M., Gedeonová E., Katriňák T., Smítal L.: *Algebra a teoretická aritmetika*, Univerzita Komenského, Bratislava 1995.
- [5] Knor M.: *Matematická logika a diskrétné štruktúry*, STU, Bratislava 2008.

NÁZOV: Diskrétna matematika
PODNÁZOV: Zbierka riešených a neriešených príkladov
AUTOR: Draženská Emília
VYDAVATEL: Technická univerzita v Košiciach
ROK: 2014
VYDANIE: prvé
ROZSAH: 78 strán

ISBN 978-80-553-1833-2